http://www.mathematik-netz.de

Einführung in die Wahrscheinlichkeits-Theorie

Maßtheoretische Grundlagen für die Modellierung von Wahrscheinlichkeiten

ALEXANDER VON FELBERT

Bonn, den 18. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

1. Überblick und Motivation

Die Wahrscheinlichkeits-Theorie (=: W-Theorie) ist ein Teilgebiet der Mathematik, in der man die Gesetzmäßigkeiten zufälliger Ereignisse untersucht. Gemeinsam mit der Statistik bildet sie das mathematische Teilgebiet der Stochastik, wobei die W-Theorie das theoretische Fundament darstellt auf dem die Statistik ruht. Dabei erfährt die W-Theorie indirekt durch das Vordringen der Statistik in Bereiche wie der Technik, der Medizin, der Ökonomie oder der Psychologie immer mehr an Bedeutung. Direkte Anwendungen der W-Theorie können vor allem in der Physik (wie z.B. der Quanten-Mechanik) oder der reinen Mathematik gefunden werden; so basisert z.B. ein von P. Erdös eingeführtes Beweisverfahren, die sog. Probabilistische Methode, auf der W-Theorie.

In dieser Arbeit werden wir maßtheoretische Grundlagen der W-Theorie herleiten, begründen und veranschaulichen. Kenntnisse aus der naiven Mengenlehre, Grundlegendes der Analysis (z.B. der Binomische Lehrsatz, Exponentialfunktion u.Ä.), ein gutes logisches Verständnis und das Interesse an der Materie sollten für eine erfolgreiche Bearbeitung dieses Dokumentes ausreichen. Das eingeschlagene Niveau wird dem einer Vorlesung an einer (deutschen) Universität entsprechen. Allerdings werden wir darüber hinaus versuchen das Verständnis mit Hilfe von Beispielen und erklärenden Kommentaren zu festigen.

Im nächten Abschnitt werden Sätze und Definitionen der naiven Mengenlehre bereitgestellt, in der Regel jedoch nicht beweisen. Zudem werden Konventionen aufstellt und die Notation festgesetzt. Das zweite Kapitel ist der Herleitung eines mathematischen Modells der Wahrscheinlichkeit gewidmet. Zunächst werden wir den einfacheren (den abzählbaren) und im Anschluss den allgemeinen (den stetigen) Fall behandeln. Dazu betrachten wir spezielle Mengensysteme auf einer Grundmenge und Abbildungen P zwischen diesen Mengensystemen. Im dritten und letzten Kapitel studieren wir zunächst die allgemeineren messbaren Abbildungen und spezifizieren unsere Erkenntnisse im Anschluss auf das im zweiten Kapitel eingeführte Modell für die Wahrscheinlichkeit. Diese speziellen messbaren Abbildungen, die sog. Zufallsvariablen, haben zur Aufgabe Maße mit denen wir die Wahrscheinlichkeit messen zu „transportieren“.

2. Grundlegendes, Notationen und Konventionen

Die **natürlichen Zahlen** exklusive der Null und die ersten n natürlichen Zahlen notieren wir durch $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ bzw. $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zudem setzen wir $\mathbb{N}^0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die Mengen der ganzen Zahlen, der rationalen Zahlen sowie der reellen Zahlen notieren wir durch $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ und verweisen für die mengentheoretische Einführung dieser Zahlenbereiche auf [7].

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M wird durch $\mathcal{P}(M)$ notiert und als **Potenzmenge** bezeichnet. Sei $N \subseteq M$, dann heißt $N^C := M \setminus N$ die **Komplementmenge** von N. Zwei Mengen M_1, M_2 heißen **fremd**, wenn sie disjunkt sind, d.h. wenn $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ist. Sind die Mengen $M_1, \dots, M_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ paarweise fremd, dann notieren wir die disjunkte Vereinigung auch durch

$$M := \sum_{i \in \mathbb{N}_n} M_i := M_1 \cup \dots \cup M_n.$$

Eine Menge von Mengen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$ einer Grundmenge M nennen wir **Mengensystem** oder **Mengenfamilie** über M. Wir notieren dies oft auch durch $(M_i)_{i \in I}$ oder kürzer durch (M_i), wobei I eine beliebige Indexmenge sei. Ein Mengensystem $\{M_i |\ i \in \mathbb{N}_n,\ M_i \cap M_j$ für $i \neq j\ \}$ mit $M = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} M_i$ heißt **Partition** der Menge M. Mit Hilfe der üblichen Mengenoperationen können wir eine weitere Mengenoperation erklären.

I.2.1 Definition: Seien A, B Mengen, dann heißt die Menge

$$\begin{aligned} A \Delta B :=&\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ =&\ (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) \\ =&\ (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

heißt **symmetrische Differenz** von A und B.

Ferner sei an die Gesetze von De Morgan erinnert.

I.2.2 Satz (Gesetze von De Morgan): Seien A_i mit $i \in \mathbb{N}$ Mengen, dann gelten:

(i) $\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)^C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^C$;

(i) $\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)^C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^C$.

Beweis. Ein Beweis ist z.B. in [3], Satz 1.2.4 oder in [7], Kapitel 1 zu finden. □

I.2.3 Definition: (i) Die Menge aller Punkte $\omega \in \Omega$, die zu fast allen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ gehören, d.h. zu allen A_i bis auf endlich vielen Ausnahmen, wird der **untere Limes** oder **Limes inferior** der Mengenfolge (A_i) genannt und mit $\liminf_{i \to \infty} A_i = \underline{\lim} A_i$ bezeichnet.

(ii) Die Menge aller Punkte $\omega \in \Omega$, die zu unendliche vielen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ gehören, wird der **obere Limes** oder **Limes superior** der Mengenfolge (A_i) genannt und mit $\limsup_{i \to \infty} A_i = \overline{\lim} A_i$ bezeichnet.

Das beide Definitionen im Allgemeinen echt verschieden sind, ersieht man an der einfachen Mengenfolge

$$A_i := \begin{cases} [0,1] & \text{für } i = 2n \\ [0,\frac{1}{2}] & \text{für } i = 2n-1 \end{cases},$$

denn $\underline{\lim} A_i = [0,\frac{1}{2}]$ und $\overline{\lim} A_i = [0,1]$. Zudem gilt stets $\underline{\lim} A_i \subseteq \overline{\lim} A_i$.

I.2.4 Satz: (i) $\underline{\lim} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq i} A_k$;

(ii) $\overline{\lim} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq i} A_k$.

Beweis. [6], Abschnitt 1.1, Satz 3. □

I.2.5 Definition: Sei (A_i) mit $i \in \mathbb{N}$ eine Mengenfolge in Ω.

(i) (A_i) heißt **isoton**, wenn $A_i \subseteq A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, **antiton**, wenn $A_{i+1} \subseteq A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und **monoton**, wenn (A_i) entweder isoton oder antiton ist.

(ii) Die Folge (A_i) **konvergiert isoton** gegen A, in Zeichen $A_i \uparrow A$, wenn (A_i) isoton ist und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A$ gilt.

(iii) Die Folge (A_i) **konvergiert antiton** gegen A, in Zeichen $A_i \downarrow A$, wenn (A_i) antiton ist und $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = A$ gilt.

(iv) Die Folge (A_i) **konvergiert monoton** gegen A, wenn (A_i) isoton oder antiton gegen A konvergiert.

Die Bezeichnungen isoton, antiton und monoton werden auch in der Ordnungstheorie verwendet; schließlich bildet die Inklusion selbst eine Partialordnung auf der jeweiligen Grundmenge Ω. Die Folge $(A_i) := \{[0,i] | \ i \in \mathbb{N}\}$ ist isoton und $(B_i) := \{[0,\frac{1}{i}] | \ i \in \mathbb{N}\}$ antiton und offenbar gilt $A_i \uparrow \mathbb{R}^+$ sowie $B_i \downarrow \{0\}$.

Fügt man den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ die ideellen Elemente $+\infty$ und $-\infty$ hinzu, so entsteht die Menge der **erweiterten reellen Zahlen**

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ setzt man

$$a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty.$$

Ferner sei

$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ \mp\infty & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

und $\frac{a}{\pm\infty} = 0$. Schließlich setzen wir noch $(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty$, $(\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty$, $\frac{1}{0} := +\infty$ sowie $-\infty < a < \infty$. Durch die letzte Ungleichung wird die Totalordnung auf $\overline{\mathbb{R}}$ fortgesetzt.

Hingegen bleiben die Operationen

$$(\pm\infty) - (\pm\infty)$$

ungeklärt, da sie keinen Sinn ergeben. Die so definierte erweiterte Addition und Multiplikation ist kommutativ und assoziativ, doch die Struktur von $\overline{\mathbb{R}}$ zusammen mit den erweiterten Verknüpfungen ist kein algebraischer Körper.

Als nächstes erinnern wir an einige grundlegende Eigenschaften von sog. Urbilder.

I.2.6 Definition: (1) Sei $T : \Omega \to \Omega'$ eine beliebige Abbildung, dann ist die zu T gehörige **Urbildabbildung**

$$\overset{-1}{T} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega')$$

definiert durch

$$\overset{-1}{T}(A') := \{\omega \in \Omega |\ T(\omega) \in A'\}$$

für alle $A' \subseteq \Omega'$. Zudem heißt $\overset{-1}{T}(A')$ das **Urbild von** A' bei T.

(2) Ist $\mathcal{K}'$ ein Mengensystem über Ω', so heißt

$$\overset{-1}{T}(\mathcal{K}') := \{\overset{-1}{T}(A') |\ A' \in \mathcal{K}'\}$$

das **Urbild von** $\mathcal{K}'$ bei T.

(3) Das Urbild eines Elements $\omega' \in \Omega'$ heißt **Faser** von ω' unter T.

Ein Beispiel wird die Definition veranschaulichen.

I.2.7 Beispiel: Betrachten wir die Abbildung $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $T(x) := x^2$, dann ist das Urbild einer beliebigen Zahl $n \in \mathrm{Bild}(T)$ bestimmt durch

$$\overset{-1}{T}(n) = \{+\sqrt{n},\ -\sqrt{n}\}.$$

Da die Faser mehr als ein Element enthält, ist die Abbildung f nicht injektiv.

Als nächstes stellen wir die wichtigsten Eigenschaften von Urbildern in einem Satz prägnant zusammen. Den Beweis unterdrücken wir und verweisen stattdessen auf die Literatur.

I.2.8 Satz: Seien $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und $A', B' \in \mathcal{P}(\Omega')$ sowie $(A_i|i \in I)$ eine Mengenfamilie in Ω'. Dann gilt:

(i) $\overset{-1}{T}(\varnothing) = \varnothing$;

(ii) $\overset{-1}{T}((A')^C) = \overset{-1}{T}(A')^C$ und daher $\overset{-1}{T}(\Omega') = \Omega$;

(iii) $A' \subseteq B' \Rightarrow \overset{-1}{T}(A') \subseteq \overset{-1}{T}(B')$;

(iv) $\bigcup_{i\in I} \overset{-1}{T}(A'_i) = \overset{-1}{T}(\bigcup_{i\in I} A'_i)$;

(v) $\bigcap_{i\in I} \overset{-1}{T}(A'_i) = \overset{-1}{T}(\bigcap_{i\in I} A'_i)$;

(vi) $\sum_{i\in I} \overset{-1}{T}(A'_i) = \overset{-1}{T}(\sum_{i\in I} A'_i)$.

Beweis. [10], 1. Abschnitt, Bilder und Urbilder. □

Der Beweis des nächsten Satzes ist ebenfalls in dem sehr schönen Werk [10] im selben Abschnitt zu finden.

I.2.9 Satz: Seien $T : \Omega \to \Omega'$ und $S : \Omega' \to \Omega''$ Abbildungen, dann ist

$$(\overset{-1}{S \circ T})(A'') = \overset{-1}{T}(\overset{-1}{S}(A''))$$

für alle $A'' \subseteq \Omega''$.

II. Wahrscheinlichkeitsräume

1. Zufallsexperiment, Ereignis und Wahrscheinlichkeit

Die Stochastik umfasst neben der abstrakten Modellebene zusätzlich eine empirische Ebene, deren Datenmaterial durch die Beobachtung von sog. Zufallsexperimenten erhoben wird. Zwischen beiden Ebenen besteht ein Zusammenhang, der Implikationen zwischen den Ebenen erlaubt.

Ein **Zufallsexperiment** ist ein im Prinzip beliebig oft *wiederholbarer Vorgang mit ungewissem Ausgang.* Zu Zufallsexperimenten zählt man klassischerweise

- das Werfen von Münzen (oder Würfeln)
- das Ziehen von Kugeln aus einer Urne.

Es könnte der Eindruck entstehen, dass man auf dem ersten Blick, z.B. beim Werfen einer Münze, keinerlei Gesetzmäßigkeiten konstatieren könnte. Bei hinreichend vielen Münzwürfen stellt man jedoch fest, dass bei einer (symmetrischen) Münze beide Seiten (Kopf und Zahl) annäherend gleich oft als Ergebnis zu beobachten ist. Eine symmetrisch geformte Münze oder einen symmetrischen Würfel bezeichnen wir auch als **fair**.

Ein wesentliches Charakteristikum eines Zufallsexperimentes ist die Menge der möglichen *Ausgänge.* Wir nennen eine Menge, welche die möglichen Ausgänge des Zufallsexperimentes enthält, **Ausgangsraum** Ω des Zufallsexperiments. Neben dem Begriff des Ausgangsraumes sind auch „Merkmalsraum", „Stichprobenraum" oder „Ergebnisraum" gebräuchlich. Die atomaren Elemente des Ausgangsraumes Ω heißen **Elementarereignisse** des Zufallsexperimentes. Ein **Ereignis** ist etwas, von dem nach Ablauf des Zufallsexperimentes deterministisch feststeht, ob es eingetreten ist oder nicht. Demnach kann ein Ereignis ein Elementarereignis oder eine beliebige Teilmenge des Ausgangsraumes Ω sein. Ereignisse werden demnach stets als Teilmengen des Ausgangsraumes modelliert.

II.1.1 Beispiel: Beim Werfen *eines* fairen Würfels, ist ein nahe liegender Ausgangsraum

$$\Omega := \{1,2,3,4,5,6\} = \mathbb{N}_6.$$

Werfen wir dagegen mit *zwei* Würfeln, dann wäre

$$\Omega^2 := \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \mathbb{N}_6^2,$$

ein sinnvoll gewählter Ausgangsraum. Es kann aber auch jede Obermenge von Ω bzw. Ω^2 als Ausgangsraum der beiden Zufallsexperimente dienen. Entscheidend ist, dass alle möglichen Ausgänge in Ω enthalten sind.

Die natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, 6$ sind die Elementarereignisse des zu Ω gehörenden Zufallsexperimentes. Entsprechend bilden die Tupel (i, j) mit $i, j \in \mathbb{N}_6$ die Elementarereignisse des zu Ω^2 zugehörigen Zufallsexperimentes. Neben den Elementarereignissen sind auch komplexere Ereignisse wie $E := \{1, 3, 5\} \subseteq \Omega$ von Interesse. Bei diesem Zufallsexperiment interessiert man sich dafür, ob die gewürfelte Zahl ungerade ist oder nicht. Nach jedem Wurf kann exakt bestimmt werden, ob eines der Elemente $1, 3$ oder 5 aus E „getroffen“ wurde oder nicht.

Fassen wir alle möglichen Ereignisse eines Zufallsexperimentes zusammen, so erhalten wir ein **Ereignissystem $\mathcal{A}$**. Eine natürliche Wahl für die Ereignissysteme von Beispiel II.1.1 sind die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ bzw. $\mathcal{P}(\Omega^2)$, d.h. die Mengen aller Teilmengen von Ω und Ω^2. Im Vorgriff auf das Folgende bemerken wir bereits an dieser Stelle, dass die Potenzmenge nur für endlich und abzählbar unendliche Mengen die notwendigen Eigenschaften für eine stringente Modellierung der Wahrscheinlichkeit besitzt.

Ein Ereignissystem $\mathcal{A}$ muss **abgeschlossen gegenüber den Mengenoperationen** sein, d.h. für $A, B \in \mathcal{A}$ muss $A * B \in \mathcal{A}$ gelten, wobei $*$ eine beliebige Mengenoperation sei. Für $*$ könnte z.B. die Vereinigung, die Mengendifferenz oder die symmetrische Differenz eingesetzt werden.

Schließlich benötigen wir noch ein Maß für die Wahrscheinlichkeit selbst. Dazu betrachten wir eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, welche die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für den Eintritt eines beliebigen Ereignisses $A \in \mathcal{A}$ misst. Ist $A \subseteq \Omega$ eine Teilmenge und bezeichnet $\omega \in \Omega$ das Ergebnis des Zufallsexperimentes, so sagen wir, dass das **Ereignis A eingetreten ist**, wenn ω ein Element von A ist, d.h. wenn $\omega \in A$ gilt. Die Komplementärmenge $A^C = \Omega \setminus A$ bezeichnet das **Komplementärereignis** zu A, das genau dann eintritt, wenn A nicht eintritt. Da in jeden Fall eines der Elemente der Ausgangsmenge Ω als Ergebnis eines Zufallsvorgangs realisiert wird, ist durch Ω ein **sicheres Ereignis** definiert. Das Komplementärereignis Ω^C zu Ω ist das **unmögliche Ereignis** und wird durch die leere Menge $\varnothing$ dargestellt.

Aus Ereignissen, also Teilmengen des Ausgangsmenge Ω, lassen sich mit Hilfe von Mengenoperationen neue Ereignisse bilden. So ist durch die Schnittmenge $A \cap B$ der Ereignisse A und B von Ω ein Ereignis definiert, welches genau dann eintritt, wenn sowohl A als auch B eintritt. Zwei Ereignisse A und B von Ω, deren Schnittmenge die leere Menge $\varnothing$ ist, schließen sich gegenseitig aus. Deartige Ereignisse heißen **disjunkt**. Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ beschreibt ein Ereignis, das dann realisiert wird, wenn mindestens eines der beiden Ereignisse A oder B eintritt.

Bemerkung: Ein Ereignissystem ist *abgeschlossen gegenüber Mengenoperationen.*

Im nächsten Abschnitt werden wir das bislang nur heuristisch beschriebene Modell für die Wahrscheinlichkeitsmessung für diskrete Ausgangsräume formal erfassen.

2. Diskrete Wahrscheinlichkeits-Räume

Ein diskreter Wahrscheinlichkeits-Raum zeichnet sich insbesondere durch einen abzählbaren Ausgangsraum Ω aus, wobei der Ereignisraum der Potenzmenge des Ausgangsraumes entspricht. Die bereits erwähnte Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ zur Messung der Wahrscheinlichkeit muss gewissen Bedingungen genügen – es ist evident, dass eine Wahrscheinlichkeit z.B. nicht negativ sein kann.

II.2.1 Definition (W-Maß): Sei $\mathcal{A}$ ein Mengensystem über Ω. Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $P(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathcal{A}$ (Nichtnegativität)

(ii) $P(\Omega) = 1;$ (Normiertheit)

(iii) Für jede Mengenfolge (A_n) *paarweiser fremder* Mengen aus $\mathcal{A}$ gilt:

$$P(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n) \quad = \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n). \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

heißt **Wahrscheinlichkeits-Maß auf** Ω oder auf $\mathcal{P}(\Omega)$.

Es sei darauf hingewiesen, dass in (iii) der Definition eines W-Maßes das Summensymbol Σ in zweifacher Bedeutung auftritt. Zum Einen stellt es die disjunkte Vereinigung und zum Anderen die Summe der Wahrscheinlichkeiten $P(A_n)$ dar. Mit Hilfe der W-Maße können wir nun den zentralen Begriff in diesem Teilabschnitt definieren.

II.2.2 Definition (Diskreter W-Raum): Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt **diskreter Wahrscheinlichkeits-Raum**, wenn

(i) Ω eine nichtleere, abzählbare Menge,

(ii) $\mathcal{A}$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von Ω und

(iii) $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein W-Maß ist.

Wir halten fest, dass ein W-Maß P eines diskreten W-Raumes bereits durch die Funktionswerte $P(\omega)$ mit $\omega \in \Omega$ bestimmt ist. Aufgrund der σ-Additivität von P und der Abzählbarkeit des Ausgangsraumes Ω ist

$$P(A) = P(\sum_{\omega\in A} \{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) \qquad \forall A \subseteq \Omega.$$

Unmittelbar aus der Definition ergeben sich die nachfolgenden elementaren Erkenntnisse.

II.2.3 Folgerung: Gegeben sei ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, dann gelten:

(i) $P(\varnothing) = 0;$

(ii) $P(A + B) = P(A) + P(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $A \cap B = \varnothing$;

(iii) $P(A^C) = 1 - P(A)$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$;

(iv) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$;

(v) $P(A) \leq 1$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Beweis. (i) Gemäß Definition des W-Maßes gilt

$$\begin{aligned}
1 = P(\Omega) &= P(\Omega + \varnothing + \varnothing + \ldots) \\
&= P(\Omega) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \ldots \\
&= P(\Omega) + \infty \cdot P(\varnothing),
\end{aligned}$$

weshalb durch Subtraktion von $P(\Omega) = 1$ grade $P(\varnothing) = 0$ folgt.

(ii) Mit Hilfe der σ-Additivität und (i) folgt

$$P(A + B) = P(A + B + \varnothing + \ldots) = P(A) + P(B) + P(\varnothing) + \ldots = P(A) + P(B).$$

(iii) Wegen (ii) ist $1 = P(\Omega) = P(A + A^C) = P(A) + P(A^C)$, woraus $P(A^C) = 1 - P(A)$ folgt.

(iv) Da $A \subseteq B$ ist $B = (B \setminus A) + A$, weshalb mit der σ-Additivität

$$P(B) = P((B \setminus A) + A) = P(B \setminus A) + P(A)$$

folgt. Aufgrund der Nichtnegativität ergibt sich damit die Behauptung.

(v) Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist $A \subseteq \Omega$ und mit (iv) gilt damit $P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

□

II.2.4 Definition (W-Funktion): Sei $\Omega \neq \varnothing$ eine abzählbare Menge. Eine Funktion $f : \Omega \to [0, 1]$ heißt **Wahrscheinlichkeits-Funktion** auf Ω, wenn

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1.$$

Wie wir bereits konstatiert haben, sind die Bilder eines W-Maßes P bereits durch die Bilder der Elementarereignisse eindeutig bestimmt.

II.2.5 Beispiel: Seien $\Omega := \mathbb{N}_n (n \in \mathbb{N})$ und $f : \mathbb{N}_n \to [0, 1]$ definiert durch $f(i) := \frac{1}{n}$ mit $i \in \mathbb{N}_n$, dann ist f eine W-Funktion auf $\mathbb{N}_n$, da

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_n} f(i) = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Für $n := 6$ ergibt sich gerade die W-Funktion aus Beispiel II.1.1 für das Zufallsexperiment des einmaligen Werfen eines Würfels.

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein diskreter W-Raum mit $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, dann gilt

$$P(\Omega) \;=\; P(\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}) \;=\; P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots \;=\; 1,$$

wegen der Normiertheit und der σ-Additivität des Maßes P. Setzen wir also $f(\omega) := P(\omega)$, so wird dadurch eine W-Funktion durch das Maß P erklärt.

II.2.6 Definition: Seien $\Omega \neq \varnothing$ eine abzählbare Menge und P ein W-Maß auf Ω. Die durch $f(\omega) := P(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ definierte W-Funktion $f : \Omega \to [0,1]$ heißt die durch P **induzierte** W-Funktion oder W-Funktion **von** P.

Der nächste Satz zeigt die bereits angedeutete enge Verwandtschaft zwischen W-Funktion und W-Maß im diskreten Fall auf.

II.2.7 Satz: Sei $f : \Omega \to [0,1]$ eine W-Funktion. Dann existiert genau ein W-Maß P auf Ω mit f als W-Funktion von P. Dieses W-Maß ist gegeben durch

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} f(\omega) \qquad A \subseteq \Omega.$$

Beweis. Unmittelbar aus der Definition von P durch die W-Funktion f folgt, dass P nicht negativ und normiert ist. Zum Nachweis der σ-Additivität sei (A_n) eine Folge von paarweise fremden Mengen aus $\mathcal{P}(\Omega)$, dann gilt aufgrund des Umordnungssatzes für nichtnegative Summanden

$$P(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{\omega \in \sum A_n} f(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\omega \in A_n} f(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n).$$

Wegen der Definition von P folgt, dass f die W-Funktion von P ist und da eine W-Funktion bereits das W-Maß eindeutig bestimmt ist die Eindeutigkeit klar. $\square$

II.2.8 Beispiel: a) Sei $\Omega := \mathbb{N}_n^0$, $0 \leq p \leq 1$ und $q = 1 - p$, dann ist durch

$$f(k) := \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \;=\; \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}\, p^k q^{n-k}$$

mit $k \in \mathbb{N}_n^0$ eine W-Funktion auf $\mathbb{N}_n^0$ erklärt. Wegen $p + q = 1$ folgt

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \;=\; (p+q)^n \;=\; 1^n \;=\; 1$$

gemäß dem Binomischen Lehrsatz. Das dadurch erklärte W-Maß heißt **Binomialverteilung** mit den Parametern n und p und man notiert dies durch $B(n,p)$.

b) Seien $\Omega := \mathbb{N}^0$ und $\lambda > 0$, dann ist durch

$$f(k) := \; e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

mit $k \in \mathbb{N}^0$ eine W-Funktion auf $\mathbb{N}^0$ erklärt. Es ist

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \;=\; e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \;=\; e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

da die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergiert und den Reihenwert e^λ besitzt. Das durch diese W-Funktion definierte W-Maß heißt die **Poisson-Verteilung** mit dem Parameter λ; wir schreiben $\Pi(\lambda)$.

c) Die in Beispiel II.2.5 erklärte W-Funktion impliziert ein auf $\mathbb{N}_n$ definiertes W-Maß, welches wir diskrete **Gleichverteilung** auf $\mathbb{N}_n$ nennen. Hat das Ereignis $A \subseteq \Omega$ genau l Elemente, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit als $P(A) = \frac{l}{n}$. Dabei sind l die für das Zufallsexperiment „günstigen Fälle“ und n die Anzahl aller „möglichen Fälle“. Oftmals bezeichnet man den so eingeführten W-Begriff auch als **Laplaceschen W-Begriff**.

Bitte beachten Sie, dass der verwendete Begriff „Verteilung“ in den obigen Beispiele lediglich Namen für die W-Maße sind. Weiter unten werden wir den mathematischen Begriff der „Verteilung“ einführen und feststellen, dass allgemeine W-Maße gerade den „Verteilungen“ entsprechen (können).

3. Stetige Wahrscheinlichkeits-Räume

Im letzten Abschnitt haben wir uns auf W-Räume beschränkt, deren Ausgangsraum höchstens abzählbar unendlich viele Elemente enthält.

Von einem geeignetem Wahrscheinlichkeits-Maß verlangen wir die so genannte Bewegungsinvarianz, d.h. die Maßzahl muss gegenüber einer Translation, einer Rotation oder einer Drehung invariant sein (vgl. [6], Abs. 2.5, S.78ff). Besitzt der Ausgangsraum Ω überabzählbar viele Elemente, so versagt die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ als Ereignissystem, da *keine* σ-additive, normierte und bewegungsinvariante Funktion

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$$

und somit auch kein entsprechendes Maß existiert. Das beschriebene Problem ist auch unter dem Namen Maßproblem bekannt und wurde in der Dissertation von H. Lebesgue im Jahr 1902 vorgestellt. Bereits 1905 gab G. Vitali eine negative Antwort (Satz von Vitali). Einen Beweis für den eindimensionalen Fall ist in [5] im Abschnitt 8.6 über die Meßbarkeit zu finden.

Die Lösung der Misere liegt in der Einführung eines neuen Mengensystems, welche als Ereignissystem dient und die nicht-messbaren Mengen meidet. Die nach E. Borel benannte Borelsche σ-Algebra erfüllt die geforderten Eigenschaften eines bewegungsinvarianten Maßes und ist nach dem Satz von Vitali eine *echte* Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. D.h. es existieren Teilmengen von $\mathbb{R}$, welche nicht Element der Borelschen σ-Algebra sind. Derartige Mengen kann man z.B. mit Hilfe des Auswahlaxiomes konstruieren (vgl. [8], §8, insb. Satz 8.6). Um die Borelsche σ-Algebra verstehen und einführen zu können, werden wir zunächst Mengen-Ringe und -Algebren studieren.

3.1. Halbringe, Ringe und Algebren

In diesem Teilabschnitt untersuchen wir Mengensysteme einer Grundmenge Ω, d.h. Mengen von Teilmengen von Ω. Direkt im Anschluss definieren wir Halbringe und führen darauf aufbauend Ringe und Algebren ein. Zudem werden wir die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Mengenstrukturen aufzeigen und sie mit Beispielen veranschaulichen.

II.3.1 Definition (Halbring): Ein nichtleeres Mengensystem $\mathcal{H} \subseteq 2^{\Omega}$ (von Ω) heißt (Mengen-) **Halbring** über Ω, wenn

(i) $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{H}$

(ii) $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \setminus B = \sum_{i=1}^{n} C_i$,

wobei die C_i paarweise fremde Mengen aus $\mathcal{H}$ sind, gilt.

Die Menge Ω bezeichnen wir auch als **Grundmenge**.
Ein Halbring $\mathcal{H}$ ist wegen (i) der Definition offenbar abgeschlossen bezüglich des Mengendurchschnittes und zudem enthält jeder Halbring die leere Menge. Da $\mathcal{H}$ nichtleer ist, existiert ein $A \in \mathcal{H}$ und mit (ii) der Definition ist $A \setminus A = \emptyset \in \mathcal{H}$.

II.3.2 Beispiel: a) Das System $\mathcal{I}$ aller endlichen rechts-halboffenen Intervalle

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | \ a \leq x < b\} \subsetneq \mathbb{R}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$ ist ein Halbring. Der Durchschnitt zweier rechts-halboffenen Intervalle ist entweder leer oder selbst ein solches Intervall, d.h. es gilt (i). Seien A, B zwei rechts-halboffenen Intervalle aus $\mathbb{R}$, dann ist $A \setminus B = A \cap B^C$. Sind also A und B disjunkt, so ist $A \setminus B = A$, ist dagegen $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist $A \setminus B$ leer, ein rechts-halboffenes Intervall oder die Vereinigung zweier disjunkter rechts-halboffener Intervalle.

b) Für je zwei Punkte $a := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), b := (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\begin{array}{lll} a \trianglelefteq b & :\Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N}_n : \ \alpha_i \leq \beta_i \qquad \text{bzw.} \\ a \triangleleft b & :\Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N}_n : \ \alpha_i < \beta_i. \end{array}$$

Das System $\mathcal{I}^n$ aller endlichen rechts-halboffenen Intervalle

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n | \ a \trianglelefteq x \triangleleft b\} \subsetneq \mathbb{R}^n$$

ist ein Halbring. Geometrisch handelt es sich dabei um achsenparallele „nach rechts hin offene“ Quader. Ein entsprechender Nachweis verläuft analog zu a).

Als nächstes betrachten wir ein Mengensystem, welches bezüglich der *endlichen* Vereinigung und des *endlichen* Durchschnitts abgeschlossen ist. Dazu folgende

II.3.3 Definition (Ring): Ein nichtleeres System $\mathcal{R}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt (Mengen-) **Ring** über Ω, falls

(i) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B$.

Ist überdies die Grundmenge $\Omega \in \mathcal{R}$, so spricht man von einer (Mengen-) **Algebra** über Ω. Ein Ring $\mathcal{R}$ über Ω heißt σ-**Ring**, wenn er auch gegen abzählbare Vereinigungsbildung abgeschlossen ist.

Jeder Ring ist zugleich ein Halbring, da für zwei beliebige Teilmengen A und B einer Grundmenge Ω die Identität

$$A \cap B = A \cup B \setminus (A \setminus B) \setminus (B \setminus A) \tag{II.1}$$

gilt. Zudem ist $A \setminus B =: C_1 = \sum_{i=1}^{1} C_i$ im Ring enthalten, womit sich die Gültigkeit des Axioms (ii) aus Definition II.3.1 ergibt. Wir konstatieren

II.3.4 Proposition: Jeder Ring ist zugleich ein Halbring.

Da jeder Ring ein Halbring ist enthält auch jeder Ring die leere Menge. Das System $\mathcal{I}$ aus Beispiel II.3.2 a) ist kein Ring, da die Vereinigung zweier halb-rechtoffener Intervalle im Allgemeinen nicht wieder ein halb-rechtsoffenes Intervall ist. Dieses Gegenbeispiel lehrt uns also, dass die Umkehrung der letzten Proposition falsch ist.

II.3.5 Beispiel: Sei Ω eine beliebige Menge.

a) Für $\Omega \neq \varnothing$ ist $\{\varnothing\}$ ein Ring und keine Algebra.

b) Dagegen sind die Mengensystem $\{\varnothing, \Omega\}$ und $\mathcal{P}(\Omega)$ Algebren. Man beachte, dass die Potenzmenge abgeschlossen gegenüber Mengenoperationen wie z.B. dem Durchschnitt, der Vereinigung oder der Differenzmenge ist.

c) Das Mengensystem

$$\mathcal{K} := \{A \subseteq \Omega : \ |A| < \infty \text{ oder } |A^C| < \infty\}$$

ist eine Algebra. Wegen $\varnothing \in \mathcal{K}$ sind $\mathcal{K}$ nichtleer und $\varnothing^C = \Omega \in \mathcal{K}$. Ist $A, B \in \mathcal{K}$, so liegt einer der folgenden vier Fälle vor:

1. $|A|, |B| < \infty$; dann ist
   $|A \cup B| \leq |A| + |B| < \infty$ und somit $A \cup B \in \mathcal{K}$ sowie
   $|A \setminus B| = |A \cap B^C| \leq |A| < \infty$ also $A \setminus B \in \mathcal{K}$.
2. $|A|, |B^C| < \infty$; dann ist
   $|(A \cup B)^C| = |A^C \cap B^C| \leq |B^C| < \infty$ und somit $A \cup B \in \mathcal{K}$ sowie
   $|A \setminus B| = |A \cap B^C| \leq |B^C| < \infty$ also $A \setminus B \in \mathcal{K}$.
3. $|A^C|, |B| < \infty$; dann ist
   $|(A \cup B)^C| = |(A^C \cap B^C)^C| \leq |A^C| < \infty$ und somit $A \cup B \in \mathcal{K}$ sowie
   $|(A \setminus B)^C| = |(A \cap B^C)^C| = |A^C \cup B| \leq |A^C| + |B| < \infty$ also $A \setminus B \in \mathcal{K}$.
4. $|A^C|, |B^C| < \infty$; dann ist
   $|(A \cup B)^C| = |A^C \cap B^C| \leq |A^C| < \infty$ und somit $A \cup B \in \mathcal{K}$ sowie
   $|A \setminus B| = |A \cap B^C| \leq |B^C| < \infty$ also $A \setminus B \in \mathcal{K}$.

Damit ist $\mathcal{K}$ ein Ring mit $\Omega \in \mathcal{K}$ und somit eine Algebra.

Neben der Vereinigung und der Mengendifferenz ist ein Ring zudem abgeschlossen bezüglich der symmetrischen Differenz und des Durchschnittes.

II.3.6 Proposition: Seien $\mathcal{R}$ ein Ring und $A, B \in \mathcal{R}$, dann gelten:

(i) $A \cap B \in \mathcal{R}$;

(ii) $A \Delta B \in \mathcal{R}$;

(iii) $A_i \in \mathcal{R}\ \forall i \in \mathbb{N}_n \ \Rightarrow\ \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{R}$ sowie $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{R}$.

Beweis. (i) Jeder Ring ist ein Halbring (vgl. Proposition II.3.4) und mit der Definition II.3.1 folgt die Behauptung.

(ii) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, dann ist

$$A \Delta B = (A \setminus B) + (B \setminus A),$$

und $(A \setminus B), (B \setminus A) \in \mathcal{R}$ weshalb auch $A \Delta B \in \mathcal{R}$ gilt.

(iii) Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang mit $n = 2$ ergibt sich gerade aus der Definition II.3.3 und (i) dieser Proposition. Sei die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen und sei $A_i \in \mathcal{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}_{n+1}$, dann folgen die Behauptungen aus

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i &= \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1} \in \mathcal{R} \qquad \text{und} \\ \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i &= \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1} \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Jede Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Ring.

Beweis. Seien $A, B \in \mathcal{A}$, dann ist

$$A \setminus B = A \cap B^C = (A^C \cup B)^C \in \mathcal{A},$$

womit die Behauptung folgt. □

Eine Algebra (d.h. einem Ring $\mathcal{R}$ mit $\Omega \in \mathcal{R}$) ist abgeschlossen gegenüber der Komplementbildung. Sei $A \in \mathcal{R}$, dann liegt auch die Differenzmenge $A^C = \Omega \setminus A$ in $\mathcal{R}$. Eine Mengen-Algebra ist also demnach gegenüber der *endlichen* Anwendung von Mengenoperationen abgeschlossen.

3.2. σ-Algebren

Wie wir zu Beginn dieses Dokuments festgestellt haben, muss ein Ereignissystem eines geeigneten Modells der Wahrscheinlichkeitstheorie abgeschlossen gegenüber den Mengenoperationen sein.

II.3.7 Definition (σ-Algebra):

(1) Ein nichtleeres System $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Grundmenge Ω heißt **σ-Algebra** über Ω, wenn gilt

   (i) $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^C \in \mathcal{A}$

   (ii) für jede Folge (A_i) von Mengen aus $\mathcal{A}$ liegt $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ in $\mathcal{A}$.

(2) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω, dann heißt $(\Omega, \mathcal{A})$ **Messraum**.

II.3.8 Beispiel: a) Sei Ω eine nichtleere Menge, dann ist $\{\varnothing, \Omega\}$ eine σ-Algebra.

b) Seien Ω eine nichtleere Menge und $A \subseteq \Omega$, dann ist $\{\varnothing, A, A^C \Omega\}$ eine σ-Algebra.

c) Sei Ω eine nichtleere Menge, dann ist $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.

Als nächstes halten wir einfache Folgerungen aus der Definition über σ-Algebren fest.

II.3.9 Proposition: Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω.

(i) $A_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N}_n \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}_n} A_i \in \mathcal{A}$;

(ii) $A_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N}_n \;\Rightarrow\; \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$;

(iii) $A_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N}_n \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}_n} A_i \in \mathcal{A}$;

(iv) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathcal{A}$;

(v) Es sind $\varnothing \in \mathcal{A}$ und $\Omega \in \mathcal{A}$.

Beweis. (i) Man betrachte die Folge $A_1, \ldots, A_n, A_n, \ldots$ und wende (ii) aus Definition II.3.7 an.

(ii) Seien $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^C\right)^C$$

nach den Gesetzen von De Morgan aus Satz I.2.2 und mit Definition II.3.7 folgt die Behauptung.

(iii) Dies ist ein Spezialfall von (i).

(iv) Ergibt sich aus der Identität $A \setminus B = A \cap B^C$.

(v) Mit $A \in \mathcal{A}$ ist $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{A}$ und deshalb $\Omega = \emptyset^C \in \mathcal{A}$.

□

Gemäß (i), (iv) und (v) der letzter Proposition ist jede σ-Algebra eine Algebra. Allerdings ist nicht jede Algebra eine σ-Algebra; die Algebra aus Beispiel II.3.5 c) ist keine σ-Algebra, da sie gegenüber abzählbar unendlicher Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

II.3.10 Proposition: Sei I eine beliebige Indexmenge und $\mathcal{R}_i$ für jedes $i \in I$ ein Ring, eine Algebra oder ein σ-Algebra über Ω. Dann ist

$$\mathcal{R} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$$

ein Mengensystem desselben Typs wie die $\mathcal{R}_i$.

Beweis. Alle diese Mengensysteme $\mathcal{R}_i$ sind in Bezug auf gewisse Mengenoperationen abgeschlossen, dann ist auch der Durchschnitt über beliebige Indexmengen in Bezug auf diese Operationen abgeschlossen. □

Der Durchschnitt von Halbringen ist im Allgemeinen jedoch kein Halbring mehr, wie kommendes Beispiel zeigen wird.

II.3.11 Beispiel: Seien die Halbringe

$$\mathcal{H}_1 := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$$
$$\mathcal{H}_2 := \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

gegeben, dann ist $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2,3\}\}$ als Durchschnitt kein Halbring, da z.B. $\{1,2,3\} \setminus \{1\}$ nicht als disjunkte Vereinigung von Elemente aus dem Schnitt geschrieben werden kann.

II.3.12 Satz: Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und τ eine Teilmenge von Ω, dann ist

$$\mathcal{A}' := \tau \cap \mathcal{A} := \{\tau \cap A | \; A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über τ, welche man **Spur** von $\mathcal{A}$ in τ nennt.

Beweis. Wegen $\Omega \in \mathcal{A}$ ist $\tau = \Omega \cap \tau \in \mathcal{A}'$. Da $\tau \cap (A \setminus B) = (\tau \cap A) \setminus (\tau \cap B)$ ist $(\tau \cap A) \setminus (\tau \cap B) \in \mathcal{A}'$. Wegen $\tau \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \tau$ und dem eben Gezeigtem, ist $\mathcal{A}'$ ein σ-Ring, der wegen $(\tau \cap A) \cap (\tau \cap A^C) = \emptyset$, $(\tau \cap A) \cup (\tau \cup A^C) = \tau$ sowie $\tau \setminus (\tau \cap A) = \tau \cap A^C$ die Grundmenge τ enthält und demnach eine σ-Algebra ist. □

Im nächsten Abschnitt wird die wichtigste nicht-diskrete σ-Algebra einführt, die sog. Borelsche σ-Algebra. Zu diesem Zweck wird der Begriff des Erzeugendensystems eingeführt und erklärt.

3.3. Erzeugendensysteme, Maße und Inhalte

Im Allgemeinen ist es offenbar nicht möglich die Elemente einer σ-Algebra, wie z.B. in Beispiel II.3.8, anzugeben. Ausgehend von einem bekannten Mengensystem $\mathcal{K}$ über Ω können wir jedoch eindeutig eine σ-Algebra definieren, so dass wir $\mathcal{K}$ mit der dadurch erklärten σ-Algebra vollständig beschreiben können.

II.3.13 Satz: Sei $\mathcal{K}$ ein Mengensystem über Ω, dann existiert eine bezüglich der Inklusion kleinste σ-Algebra $\sigma_\Omega(\mathcal{K})$ über Ω, die $\mathcal{K}$ enthält. D.h. wenn $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Algebra über Ω ist, die $\mathcal{K}$ enthält, so folgt

$$\mathcal{K} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{A}.$$

Beweis. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra über Ω, d.h. die Existenz einer σ-Algebra über Ω ist gesichert. Setzt man schließlich

$$\sigma_\Omega(\mathcal{K}) := \bigcap_{\mathcal{K}\subseteq\mathcal{A}} \mathcal{A},$$

wobei mit $\mathcal{A}$ stets eine σ-Algebra über Ω bezeichnet sei, so ist dieser Durchschnitt gemäß Proposition II.3.10 wieder eine σ-Algebra. Aufgrund der Definition erfüllt diese gerade die Minimalitätseigenschaft. □

Ganz analog kann man den letzten Satz auch für Algebren und Ringe nicht jedoch für Halbringe formuliert und bewiesen werden.

II.3.14 Definition:

1. Die gemäß Satz II.3.13 kleinste (σ-)Algebra, die $\mathcal{K}$ enthält, heißt die **von $\mathcal{K}$ erzeugte** (σ-)Algebra.
2. Der kleinste Ring, der $\mathcal{K}$ enthält, heißt der **von $\mathcal{K}$ erzeugte** Ring.
3. Sodann heißt $\mathcal{K}$ ein **Erzeugendensystem** der σ-Algebra bzw. des Ringes über Ω.
4. Für den von $\mathcal{K}$ erzeugten Ring bzw. erzeugte σ-Algebra notieren wir durch $\rho_\Omega(\mathcal{K})$ bzw. $\sigma_\Omega(\mathcal{K})$. Sind Missverständnisse bzgl. der Grundmenge Ω ausgeschlossen, so notieren wir diese auch kürzer durch $\rho(\mathcal{K})$ bzw. $\sigma(\mathcal{K})$.

II.3.15 Proposition: Sind $\mathcal{K}'$ und $\mathcal{K}$ Mengensysteme über Ω, so gilt:

(i) $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K} \;\Rightarrow\; \sigma(\mathcal{K}') \subseteq \sigma(\mathcal{K})$

(ii) $\mathcal{K} \subseteq \sigma(\mathcal{K}'),\ \mathcal{K}' \subseteq \sigma(\mathcal{K}) \;\Rightarrow\; \sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{K}')$

Beweis.

(i) Offenbar ist $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K} \subseteq \sigma(\mathcal{K})$. Da $\mathcal{K}' \subseteq \sigma(\mathcal{K})$, folgt mit Satz II.3.13 und $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{K})$ gerade die Behauptung.

(ii) Gemäß Definition von $\sigma(\mathcal{K}')$ bzw. $\sigma(\mathcal{K})$ und (i) dieser Proposition folgt durch beidseitige Inklusion die Behauptung.

□

Ist das Erzeugendensystem $\mathcal{K}$ ein Halbring, so kann der von $\mathcal{K}$ erzeugte Ring $\rho(\mathcal{K})$ noch näher charakterisiert werden.

II.3.16 Satz: Der von einem Halbring $\mathcal{H}$ über Ω erzeugte Ring $\rho(\mathcal{H})$ über Ω besteht aus allen endlichen Summen paarweise fremder Mengen A_i aus $\mathcal{H}$

$$\rho(\mathcal{H}) \; = \; \{A| \; \exists n \in \mathbb{N}, \exists A_i \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathbb{N}_n| \; A = \sum_{i=1}^{n} A_i\}.$$

Beweis. [3], Satz 2.1.18. □

Da man alle endlichen Vereinigungen als disjunkte Vereinigungen schreiben kann, gilt der Satz II.3.16 auch mit allg. Vereinigungen $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, deren Glieder nicht notwendig disjunkt sind.

Als nächstes definieren wir ein sehr bedeutendes Mengensystem, welches nicht nur für die Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie sondern auch für die Topologie von großer Bedeutung ist. Betrachten Sie bitte noch einmal das Beispiel II.3.2 über Halbringe.

II.3.17 Definition: Der vom Halbring $\mathcal{I}^n$ der rechts-halboffenen Intervalle erzeugte Ring über $\mathbb{R}^n$ heißt Ring der n-**dimensionalen Figuren** $\mathcal{F}^n := \rho(\mathcal{I}^n)$.

Gemäß Satz II.3.16 besteht das Mengensystem $\mathcal{F}^n$ aus allen endlichen Summen paarweise fremder, rechts-halboffener Intervalle von $\mathbb{R}^n$.

II.3.18 Definition (Borelsche σ-Algebra): Die vom Ring aller n-dimensionalen Figuren $\mathcal{F}^n$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}^n := \sigma(\mathcal{F}^n)$ heißt Borelsche σ-**Algebra** oder **Borel-Körper**, ihre Elemente $B \in \mathcal{B}^n$ **Borel-Mengen**.

Neben den rechts-halboffenen Intervallen gibt es noch weitere Erzeugendensysteme für die Borelsche σ-Algebra.

II.3.19 Satz: $\mathcal{B}^n$ wird vom System

(i) $\mathcal{O}^n$ der offenen Mengen von $\mathbb{R}^n$ erzeugt.

(i) $\mathcal{C}^n$ der geschlossenen Mengen von $\mathbb{R}^n$ erzeugt.

Beweis. (i) Aufgrund von (ii) aus Proposition II.3.15 ist es hinreichend $\mathcal{O}^n \subseteq \sigma(\mathcal{I}^n)$ und $\mathcal{I}^n \subseteq \sigma(\mathcal{O}^n)$ nachzuweisen. Dazu sei A eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$, dann gibt es zu jedem $x \in A$ ein Intervall $[a, b) \in \mathcal{I}^n$ mit $x \in [a, b) \subseteq A$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^n$. Aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}^n$ (vgl. Lemma 3.6m [9]) folgt die Abzählbarkeit von $\{[a, b)| \; a, b \in \mathbb{Q}^n\}$. Mithin ist A die Vereinigung von abzählbar vielen solchen Intervallen, weshalb $A \in \sigma(\mathcal{I}^n)$ aufgrund der Definition einer σ-Algebra folgt und daher $\mathcal{O}^n \subseteq \sigma(\mathcal{I}^n)$ gilt.

Seien nun $[a,b)$ ein rechts-halboffenes Intervall und für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $a - \frac{1}{m} := (a_1 - \frac{1}{m}, \dots, a_n - \frac{1}{m})$. Mit $(a - \frac{1}{m}, b) \in \sigma(\mathcal{O}^n)$ folgt

$$[a,b) \;=\; \bigcap_{m=1}^{\infty} (a - \frac{1}{m}, b \in \sigma(\mathcal{O}^n)$$

mit von (ii) aus Proposition II.3.9 und daher $\mathcal{I}^n \subseteq \sigma(\mathcal{O}^n)$.

(ii) Für $A \in \mathcal{C}^n$ gilt $A^C \in \mathcal{O}^n$ und daher $A = (A^C)^C \in \sigma(\mathcal{O}^n)$, weswegen $\mathcal{C}^n \subseteq \sigma(\mathcal{O}^n)$ ist. Für $B \in \mathcal{O}^n$ gilt $B^C \in \mathcal{C}^n$ und daher $B = (B^C)^C \in \sigma(\mathcal{C}^n)$, weswegen $\mathcal{O}^n \subseteq \sigma(\mathcal{C}^n)$ ist. Gemäß Proposition II.3.15 (ii) folgt somit

$$\sigma(\mathcal{C}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n) = \mathcal{B}^n.$$

□

Jede kompakte Menge des $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen und zudem kann jede abgeschlossene Menge als Vereinigung einer monoton wachsenden Mengenfolge kompakter Mengen dargestellt werden. Mit dieser Idee kann man zeigen, dass $\mathcal{B}^n$ ebenfalls von der Menge aller kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird.

Abschließend definieren wir den zentralen Begriff dieses Abschnittes.

II.3.20 Definition (Allg. W-Raum): Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt **Wahrscheinlichkeits-Raum**, kurz W-Raum, wenn

(i) Ω eine nichtleere Menge

(ii) $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und

(iii) $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeits-Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

Es sei abschließend noch festgehalten, dass man Mengen-Ringe und -Algebren auch algebraisch deuten kann. Dazu führt man den Begriff des Verbandes ein, welcher die algebraische und die topologisch, ordnungstheoretische Welt miteinander verbindet. Mehr zu diesem Thema können Sie in [6], Abschnitt 1.5 erfahren.

Den spezielleren Begriff des W-Maßes haben wir bereits in Definition II.2.1 geklärt. Die folgenden Begriffe sind allgemeinerer Natur.

II.3.21 Definition (Maß und Inhalt): Sei $\mathcal{K}$ ein Mengensystem über Ω mit $\varnothing \in \mathcal{K}$.

(1) Eine Abbildung $\mu : \mathcal{K} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **Maß** auf $\mathcal{K}$, wenn gilt:

  (i) $\mu(\varnothing) = 0$

  (ii) $\mu(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathcal{K}$

  (iii) Für jede Mengenfolge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise fremder Mengen aus $\mathcal{K}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$ ist

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

(2) Eine Abbildung $\mu : \mathcal{K} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **Inhalt** auf $\mathcal{K}$, wenn gilt:
   (i) $\mu(\varnothing) = 0$
   (ii) $\mu(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathcal{K}$
   (iii) Für jeder endliche Mengenfolge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ paarweise fremder Mengen aus $\mathcal{K}$ mit $\sum_{i=1}^n A_i \in \mathcal{K}$ ist

$$\mu\left(\sum_{i=1}^n A_n\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i). \qquad \text{(endliche Additivität)}$$

Betrachten wir zunächst einfach Beispiele.

II.3.22 Beispiel: a) Sei die Grundmenge Ω eine abzählbar unendliche Menge und $\mathcal{K}$ die in Beispiel II.3.5 c) definierte Algebra. Setzt man für jedes $A \in \mathcal{K}$

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{wenn } A \text{ unendlich} \end{cases},$$

so ist $\mu : \mathcal{A} \to \{0, \infty\}$ ein Inhalt. Wegen

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\{\omega\}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mu\left(\sum_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = \infty$$

ist μ jedoch kein Maß.

b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Die auf dem Halbring $\mathcal{I}$ der Intervalle $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$ durch

$$\mu([a, b)) := F(b) - F(a)$$

definierte Funktion ist ein (endlicher) Inhalt auf $\mathcal{I}$. Zum Beweis zerlegt man das Intervall $[a, b)$ in beliebige disjunkte Teilintervalle $[c_0, c_1), [c_1, c_2), \ldots, [c_{n-1}, c_n)$ mit $a = c_0 \leq c_1 \leq \ldots \leq c_n = b$. Wegen

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(c_i) - F(c_{i-1})]$$

ist die endliche Additivität bewiesen. Die Nichtnegativität von μ ergibt sich aus der Monotonie von F, während der Nachweis von $\mu(\varnothing) = 0$ trivial ist. Das Beispiel kann auf $\mathcal{I}^n$ verallgemeinert werden indem man für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bzw. $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ den Inhalt $\mu : \mathcal{I}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mu([a, b)) := (\beta_1 - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\beta_n - \alpha_n) = \prod_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)$$

erklärt.

Betrachten wir zunächst die Definition eines Maßes und vergleichen diese mit der Definition eines W-Maßes, so fällt auf, dass für Maße explizit $\mu(\varnothing) = 0$ gefordert wird. Im Gegensatz dazu wurde diese Gleichung aus der Definition des W-Maßes impliziert, was in Folgerung II.2.3 konstatiert ist.

Das nächste Beispiel wird zeigen, dass diese Forderung notwendig ist, da (i) aus Definition II.3.21 (1) nicht aus (ii) und (iii) derselben Definition gefolgert werden kann.

II.3.23 Beispiel: Sei $\mathcal{K}$ ein Mengensystem über einer Menge Ω und $\mu : \mathcal{K} \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$\mu(A) := \infty \quad \forall A \in \mathcal{K},$$

dann ist

$$\mu(A) \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \mu(\sum_{i \in \mathbb{N}} A_i) \;=\; \infty \;=\; \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

für jede Folge (A_i) paarweise fremder Mengen aus $\mathcal{K}$ mit $\sum_{i \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{K}$ und andererseits $\infty = \mu(\varnothing) > 0$.

Offenbar ist jedes W-Maß auch ein Maß und jedes Maß ein Inhalt.

II.3.24 Definition (Maßraum): Ist $\mathcal{K}$ ein σ-Algebra über einer Menge Ω und $\mu : \mathcal{K} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein Maß, dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathcal{K}, \mu)$ ein **Maßraum**. Die Elemente der σ-Algebra heißen **messbare Mengen**.

Maßräume sind demnach Verallgemeinerungen von allgemeinen W-Räumen. Bitte beachten Sie die differenten Definitionen der Begriffe Maßraum und Messraum!

3.4. Fortsetzung und Eindeutigkeit von Maßen

In diesem Abschnitt wird insbesondere aufgezeigt, wie sich ein gegebenes Maß auf einem Halbring zu einem Maß auf einer σ-Algebra fortsetzen lässt. Die nächste Definition wird klären, was darunter genau zu verstehen ist.

II.3.25 Definition: Seien $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ zwei Mengensysteme über einer Grundmenge Ω, wobei $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$ ist. Gilt für die beiden Funktionen

$$\mu : \mathcal{K}_1 \to \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{und} \qquad \nu : \mathcal{K}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$\mu(A) = \nu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{K}_1,$$

so heißt ν eine **Fortsetzung von μ auf $\mathcal{K}_2$** und μ eine **Einschränkung** oder **Restriktion von ν auf $\mathcal{K}_1$**.

Wie man ein gegebenes Maß auf einem Halbring zu einem Maß auf einem Ring und von diesem zu einem Maß auf einer σ-Algebra fortsetzen kann, werden uns zwei Sätze aus der Maßtheorie beantworten. Beide Sätze werden wir nicht beweisen, da dies kaum zum Verständnis beitragen würde. Wir verweisen stattdessen auf die entsprechende Standardliteratur.

II.3.26 Satz (1. Fortsetzungsatz): Ist μ ein Maß auf einem Halbring $\mathcal{H}$, dann existiert eine eindeutige Fortsetzung von μ zu einem Maß ν auf dem von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring $\rho(\mathcal{H})$. Diese Fortsetzung ν von μ wird geliefert durch

$$\nu(A) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i),$$

wobei $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ mit $n \in \mathbb{N}$ und paarweise fremden $A_i \in \mathcal{H}$ das allgemeine Element aus $\rho(\mathcal{H})$ ist.

Beweis. [6], Abschnitt 2.3, Satz 1 und Satz 2. □

Die Definition des fortgesetzten Maßes ν ist aufgrund von Satz II.3.16 keine Überraschung, da die allgemeinen Elemente des Ringes entsprechend definiert wurden. Man nutzt demnach das Wissen um den strukturellen Aufbau des Ringes $\rho(\mathcal{H})$ gemäß Satz II.3.16, um damit das Fortsetzung ν mit Hilfe des bereits bekannten Maßes μ zu definieren.

II.3.27 Definition (σ-endlich): Sei μ ein Maß auf einem Mengensystem $\mathcal{K}$ über Ω. Dann heißt μ **σ-endlich** auf $\mathcal{K}$, wenn es eine Folge (A_i) von Mengen aus $\mathcal{K}$ mit $A_n \uparrow \Omega$ und $\mu(A_i) < \infty$ gibt.

Ist das Maß μ auf $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ endlich, d.h. gilt $\mu(A) < \varnothing$ für alle $A \in \mathcal{K}$, so reduziert sich die σ-Endlichkeit lediglich auf die Existenz einer Mengenfolge (A_i) aus $\mathcal{K}$, die isoton gegen Ω konvergiert. Wählt man $\mathcal{K} := \{\varnothing\}$ und $\Omega \neq \varnothing$, dann ist klar, dass es eine derartige Mengenfolge nicht in jedem Fall gibt.

II.3.28 Satz (2. Fortsetzungssatz): Ist μ ein σ-endliches Maß auf einem Ring $\mathcal{R}$, dann existiert eine eindeutige Fortsetzung von μ zu einem Maß ν auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$. Diese Fortsetzung ν von μ wird geliefert durch

$$\nu(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} A_i,\ (A_i) \text{ Mengenfolge aus } \mathcal{R}\right\}.$$

Beweis. [6], Abschnitt 2.4, insb. Satz 2 und Satz 3. □

Bitte beachten Sie, dass die Voraussetzung der σ-Endlichkeit notwendig für die Eindeutigkeit der Fortsetzung ist, d.h. ohne diese würden im Allgemeinen mehr als eine Fortsetzung existieren.

II.3.29 Definition (Nullmenge): Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, dann heißt eine Menge $A \in \mathcal{A}$ (μ-) **Nullmenge** aus $\mathcal{A}$, falls $\mu(A) = 0$ ist.

Abschließend defineren wir das wichtigste stetige Maß überhaupt.

II.3.30 Definition (Borel-Lebesgue-Maß): Sei $\mu : \mathcal{I}^n \to \mathbb{R}$ der Inhalt auf aus Beispiel II.3.22 b) definiert durch

$$\mu([a,b)) := \ (\beta_1 - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\beta_n - \alpha_n) \ = \ \prod_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)$$

für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bzw. $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Das durch zweimalige eindeutige Fortsetzen von μ gewonnene Maß $\lambda^n : \mathcal{B}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **Borel-Lebesgue-Maß** (kurz BL-Maß) auf $\mathcal{B}^n$.

Anstatt λ^1 schreibt man schlicht λ. Eine der wesentlichsten Eigenschaften des BL-Maßes ist die Bewegungsinvarianz, d.h. die Invarianz gegenüber Translationen, Rotationen und Spiegelungen. Formal bedeutet Bewegungsinvarianz für λ^n, dass die Gleichung

$$\forall A \in \mathcal{B}^n : \qquad \lambda^n(T(A)) = \lambda^n(A)$$

für alle Abbildungen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die den euklidischen Abstand von Punkten erhalten, gilt. Ein Beweis dessen kann man in [6], Abschnitt 2.5, Satz 4 finden.

Neben den allgemeinen Wahrscheinlichkeitsräumen haben wir gezeigt, wie man die entsprechenden Maße aus Halbräumen durch Fortsetzung gewinnen kann. Damit haben wir die Basis der Wahrscheinlichkeitstheorie fundamental mit Hilfe der Maßtheorie begründet. Im nächsten Abschnitt werden wir spezielle Abbildungen zwischen den W-Räumen betrachten, algebraisch gesprochen werden wir strukturerhaltende Abbildungen studieren.

III. Zufallsvariablen und messbare Abbildungen

Nachdem wir im letzten Kapitel W-Räume (und damit insbesondere W-Maße und σ-Algebren) studiert haben, betrachten wir im Folgenden Abbildungen zwischen den Grundmengen von σ-Algebren. Dabei sollen die betrachteten Abbildungen das W-Maß einer σ-Algebra auf eine andere übertragen, d.h. die Struktur einer gegebenen σ-Algebra respektieren und transportieren.

1. Messbare Abbildungen und ihre Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden wir die wohl grundlegendste Art von Abbildungen der Maß-Theorie definieren, die messbaren Abbildungen. Um die Definition zu verdeutlichen ist es sinnvoll zunächst einen Satz über Urbilder und σ-Algebren zu beweisen und sich die Bedeutung dessen vor Augen zu führen.

Was ein Urbild ist und welche Eigenschaften die Urbildfunktion besitzt, wurde weiter oben in den Grundlagen festgehalten. Diese Kenntnisse werden wir für den Beweis des nächsten Satzes benötigen.

III.1.1 Satz: Seien $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra über Ω', dann gelten:

(i) Das Urbild $\overset{-1}{T}(\mathcal{A}')$ ist eine σ-Algebra;

(ii) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω, so ist das System

$$\{A' \subseteq \Omega' |\ \overset{-1}{T}(A') \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über Ω'.

Beweis. (i) Sei $\mathcal{A} := \overset{-1}{T}(\mathcal{A}') = \{\overset{-1}{T}(A') |\ A' \in \mathcal{A}'\}$. Es ist $\varnothing \in \mathcal{A}'$ und mit (i) aus Satz I.2.8 folgt $\varnothing = \overset{-1}{T}(\varnothing) \in \mathcal{A}$, weshalb $\mathcal{A} \neq \varnothing$ gilt. Es sei also $A = \overset{-1}{T}(A') \in \mathcal{A}$, dann folgt $A^C = \overset{-1}{T}(A')^C = \overset{-1}{T}((A')^C) \in \mathcal{A}$ mit Satz I.2.8, (ii). Ist schließlich $A_i = \overset{-1}{T}(A'_i) \in \mathcal{A}$ mit $A'_i \in \mathcal{A}'$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \overset{-1}{T}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A'_i)$$

gemäß Satz I.2.8, (iv). Hieraus folgt $\bigcup A_i \in \mathcal{A}$, da $\bigcup A'_i \in \mathcal{A}'$.

(ii) Sei $\mathcal{A}' := \{A' \subseteq \Omega' |\ \overset{-1}{T}(A') \in \mathcal{A}'\}$, dann ist $\varnothing \in \mathcal{A}'$, da $\varnothing = \overset{-1}{T}(\varnothing)$. Für $A' \in \mathcal{A}$ ist $\overset{-1}{T}(A') \in \mathcal{A}$ und daher wegen Satz I.2.8,(ii) auch $\overset{-1}{T}((A')^C) = \overset{-1}{T}(A')^C \in \mathcal{A}$, d.h.

$(A')^C \in \mathcal{A}'$. Sei weiter $A'_i \in \mathcal{A}'$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann ist $\overset{-1}{T}(A'_i) \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Nach Satz I.2.8, (iv) folgt damit auch

$$\overset{-1}{T}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overset{-1}{T}(A'_i) \in \mathcal{A}$$

und somit $\bigcup A'_i \in \mathcal{A}'$.

□

Nun folgt die zentrale Definition dieses Kapitels.

III.1.2 Definition (Messbare Abbildung): Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ Messräume. Eine Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ heißt $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-**messbar**, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\overset{-1}{T}(A') = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \in A'\} \in \mathcal{A}$ für alle $A' \in \mathcal{A}'$;

(ii) $\overset{-1}{T}(\mathcal{A}') = \{\overset{-1}{T}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\} \subseteq \mathcal{A}$.

Sind keine Missverständnisse zu befürchten, so schreiben wir, dass eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbare Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ schlicht *messbar* ist. Die Punkte (i) bzw. (ii) der letzten Definition sind lediglich verschiedene Schreibweisen für denselben Sachverhalt. Ein Nachweis der Äquivalenz ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen von $\overset{-1}{T}(A')$ und $\overset{-1}{T}(\mathcal{A}')$. Beachten Sie, dass das Mengensystem $\overset{-1}{T}(\mathcal{A}')$ nur Teilmenge und nicht Element von $\mathcal{A}$ zu sein braucht.

Eine messbare Abbildung $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ hat zur Aufgabe das Maß der σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf ein Maß von $\mathcal{A}'$ zu übertragen. D.h. es geht letztlich um den „Transport" von Maßen zwischen σ-Algebren, so dass die Struktur des Ereignissystems beim Transport respektiert wird.

Bemerkung: Es besteht eine Analogie zwischen topologischen Räumen und Messräumen. Beide Räume sind Mengensysteme über einer gewissen Grundmenge, wobei ein topologischer Raum alle offenen Teilmengen der Grundmenge umfasst und ein Messraum die messbaren Mengen beinhaltet. Bei einer messbaren Abbildung sind die Urbilder messbarer Abbildungen messbar; bei einer stetigen Abbildung sind die Urbilder offener Mengen offen. Was für die topologischen Räume die stetigen Abbildungen sind, das sind messbare Abbildungen für Messräume.

III.1.3 Beispiel: a) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ beliebige Messräume. Die konstante Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ mit $T(\omega) := c$ für ein $c \in \Omega'$ ist messbar. Wenn $c \in A'$, dann ist $\overset{-1}{T}(A') = \Omega$ und sonst ist $\overset{-1}{T}(A') = \varnothing$.

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum mit $\mathcal{A} := \{\varnothing, \Omega\}$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum, bei dem $\mathcal{A}'$ alle Einpunktmengen von Ω' enthält. Dann sind nur die konstanten Abbildungen messbar, denn ist $T : \Omega \to \Omega'$ keine konstante Abbildung, so existieren verschiedene $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ und $c_1, c_2 \in \Omega'$ mit $c_1 \neq c_2$, so dass $T(\omega_1) = c_1 \neq c_2 = T(\omega_2)$. Mithin ist $\varnothing \neq \overset{-1}{T}(c_1) \neq \overset{-1}{T}(c_2) \neq \Omega$. Dieses Beispiel zeigt zudem, dass es nicht messbare Abbildungen gibt.

Im letzten Kapitel haben Erzeugendensysteme eine zentrale Rolle eingenommen, um etwa σ-Algebren zu charakterisieren. Der nächste Satz wird ein geeignetes Kriterium bereitstellen, um die Messbarkeit einer Funktion mit Hilfe des zugehörigen Erzeugendensystems zu prüfen.

III.1.4 Satz: Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ sowie $(\Omega', \mathcal{A}')$ beliebige Messräume und $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Weiter sei $\mathcal{K}'$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}'$, also $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{K}')$. Dann ist T genau dann messbar, wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\overset{-1}{T}(A') \in \mathcal{A}$ für alle $A' \in \mathcal{K}'$;

(ii) $\overset{-1}{T}(\mathcal{K}') \subseteq \mathcal{A}$.

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Zunächst sei T $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar, d.h. für jedes $A' \in \mathcal{A}'$ ist $\overset{-1}{T}(A') \in \mathcal{A}$. Die Notwendigkeit von (ii) ist somit evident, da $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$.
„(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Betrachten wir das System $\mathcal{D}' := \{A' \subseteq \Omega' |\ \overset{-1}{T}(A') \in \mathcal{A}\}$. Gemäß (ii) aus Satz III.1.1 ist $\mathcal{D}'$ eine σ-Algebra über Ω'. Da $\mathcal{D}'$ gerade alle Mengen $A' \subseteq \Omega$ mit $\overset{-1}{T}(A') \in \mathcal{A}$ enthält, umfasst $\mathcal{D}'$ das Mengensystem $\mathcal{K}'$, d.h. es ist $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{D}'$. Die von $\mathcal{K}'$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}'$ ist jedoch die kleinste σ-Algebra, welche $\mathcal{K}'$ enthält, d.h. es muss $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{D}'$ gelten. Somit ist die $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-Messbarkeit von T nachgewiesen. □

Die eben angewendete Beweistechnik ist typisch für die Maßtheorie, so ist es nicht verwunderlich, dass der Satz III.1.4 im nächsten Beweis Anwendung findet.

III.1.5 Satz: Jede stetige Abbildung $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{B}^m$-$\mathcal{B}^n$-messbar.

Beweis. Für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist das Urbild $\overset{-1}{T}(U)$ wegen der Stetigkeit von T eine offene Menge in $\mathbb{R}^m$ (vgl. dazu z.B. Heuser, Analysis). Gemäß Satz II.3.19 ist das Mengensystem $\mathcal{O}^n$ der offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}^n$. Andererseits liegt $\overset{-1}{T}(U)$ für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ als offene Menge in $\mathcal{B}^m$. Durch Anwendung von Satz III.1.4 folgt somit die Behauptung. □

Aus Satz I.2.9 folgt, dass die Hintereinanderausführung von messbaren Funktionen messbar ist. D.h. wenn $T : \Omega \to \Omega'$ und $S : \Omega' \to \Omega''$ messbare Abbildungen sind, dann ist die Komposition $(S \circ T) : \Omega \to \Omega''$ ebenfalls messbar. Ganz analog gilt dies sogar für beliebig viele Hintereinanderausführungen, insbesondere auch für überabzählbar viele.

Die sog. Indikatorfunktion ist für die Maßtheorie von großer Bedeutung.

III.1.6 Definition (Indikatorfunktion): Sei $A \subseteq \Omega$, dann heißt die Funktion $1_A : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\omega \mapsto 1_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion oder **chrakteristische Funktion** von A.

III.1.7 Proposition: Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $A \subseteq \Omega$. Dann ist die Indikatorfunktion $1_A : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann messbar, wenn $A \in \mathcal{A}$ gilt.

Beweis. Die zum Wertebereich von 1_A zugehörige σ-Algebra ist $\mathcal{B}$, die Borelsche σ-Algebra. Es sei also $A \in \mathcal{A}$, dann ist für $B \in \mathcal{B}$

$$\overset{-1}{1_A}(B) = \{\omega \in \Omega | \ 1_A(\omega) \in B\} = \begin{cases} \Omega & \text{für } 0, 1 \in B \\ A^C & \text{für } 0 \in B, 1 \notin B \\ A & \text{für } 0 \notin B, 1 \in B \\ \varnothing & \text{für } 0, 1 \notin B \end{cases}.$$

Sei nun umgekehrt 1_A messbar, dann folgt wegen $A = \{\omega \in \Omega | \ 1_A(\omega) = 1\} = \overset{-1}{1_A}(\{1\})$ aus $\{1\} \in \mathcal{B}$, dass $A \in \mathcal{A}$ gilt. □

Der nächste Satz zeigt, wie wir Maße von einem Raum in einen anderen übertragen können.

III.1.8 Satz: Sei $T : \Omega \to \Omega'$ eine messbare Abbildung und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$.

(i) Mit der Festlegung

$$\mu'(A') := \mu(\overset{-1}{T}(A')) \qquad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

wird ein Maß μ' auf $\mathcal{A}'$ definiert.

(ii) Ist μ speziell ein W-Maß auf $\mathcal{A}$, so ist μ' ein W-Maß auf $\mathcal{A}'$.

Beweis. (i) Aufgrund der Definition von μ' wird $\mu'(A') \geq 0$ durch die Nichtnegativität von μ impliziert. Wegen $\overset{-1}{T}(\varnothing) = \varnothing$ ist $\mu'(\varnothing) = 0$ klar. Aufgrund von Satz I.2.8 (vi) und der σ-Additivität von μ folgt für jede Folge $(A'_i | i \in \mathbb{N})$ paarweise fremder Mengen aus $\mathcal{A}'$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \mu'(\sum_{i=1}^{\infty} A'_i) &= \mu(\overset{-1}{T}(\sum_{i=1}^{\infty} A'_i)) \\ &= \mu(\sum_{i=1}^{\infty} \overset{-1}{T}(A'_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\overset{-1}{T}(A'_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(A'_i) \end{aligned}$$

und damit die σ-Additivität von μ'.

(ii) Da μ ein W-Maß ist, gilt $\mu(\Omega) = 1$, weshalb mit Hilfe von Satz I.2.8 (i) und (ii)

$$\mu'(\Omega') = \mu(\overset{-1}{T}(\Omega')) = \mu(\overset{-1}{T}(\varnothing^C)) = \mu(\overset{-1}{T}(\varnothing)^C) = \mu(\Omega) = 1$$

folgt.

□

Unter den im Satz genannten Voraussetzungen können wir mit Hilfe der Urbilder $\overset{-1}{T}(A')$ ein (W-)Maß auf der zur Wertemenge Ω' zugeordneten σ-Algebra $\mathcal{A}'$ von $T : \Omega \to \Omega'$ definieren. Wie wir im Beweis gesehen haben, werden die Eigenschaften des (W-)Maßes μ durch die Urbildfunktion auf das neue (W-)Maß übertragen.

III.1.9 Definition (Bildmaß): Sei $T : \Omega \to \Omega'$ eine messbare Abbildung und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Das durch

$$\mu'(A') := \mu(\overset{-1}{T}(A')) \qquad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

definierte Maß μ' heißt das **Bild** oder das **Bildmaß von μ bei** T. Für μ' schreiben wir auch $T(\mu)$ oder μ_T.

2. Zufallsvariablen und Verteilungen

In diesem Abschnitt werden wir die messbaren Funktionen für die W-Theorie spezifizieren und noch genauer untersuchen. Im Mittelpunkt stehen dabei die Begriffe „Zufallsvariable“ und „W-Verteilung“.

Bei einem Zufallsexperiment interessiert man sich oftmals nicht für den vom Zufall gelenkten Ausgang, sondern für beobachtbare Daten, die durch den zufälligen Ausgang implziert werden.

III.2.1 Definition (Zufallsvariable): Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum. Dann heißt jede $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbare Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ **Zufallsvariable** mit Werten in Ω'.

Anstelle von Zufallsvariable bzw. Zufallsvariablen schreiben wir kurz ZV bzw. ZVen. Gemäß Definition ist eine ZV nichts anderes als eine (spezielle) messbare Funktion. Manche Autoren (z.B. [3]) definieren eine ZV schlicht als messbare Abbildung. Für ZVen übernehmen wir alle Konventionen die wir für messbare Abbildungen aufgestellt haben.

III.2.2 Beispiel: Beim Zufallsexperiment Werfen mit zwei Würfeln ist

$$\Omega := \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6 = \mathbb{N}_6^2 = \{(i,j) \mid i,j \in \mathbb{N}_6\}$$

eine natürliche Wahl. Als W-Maß ist bei einem fairen Würfel die diskrete Gleichverteilung auf $\mathbb{N}_6^2$ das korrekte Maß, d.h. es ist $P(A) = \frac{|A|}{36}$ mit $A \subseteq \mathbb{N}_6^2$. Als Ereignissystem dient im diskreten Fall natürlich die Potenzmenge. Als Ausgänge des Zufallsexperimentes treten Tupel (i,j) mit $i,j \in \mathbb{N}_6$ auf, wobei jedes der insgesamt 36 Tupel dieselbe

Wahrscheinlichkeit besitzt aufzutreten. Interessiert man sich jedoch nicht für die Tupel (i,j), sondern für die Augensumme $i+j$ der beiden gefallenen Würfel, so ist es nahe liegend den Ausgangsraum $\Omega' := \{2,3,\dots,12\}$ zu definieren. Auch hier ist das Ereignissystem wieder die Potenzmenge. Als Zufallsvariable definieren wir uns $T:\Omega\to\Omega'$ erklärt durch

$$(i,j)\mapsto T(i,j) := i+j$$

und durch die Festsetzung

$$\mu'(A') := \mu(\overset{-1}{T}(A'))$$

ist gemäß (i) und (ii) aus Satz III.1.8 das Bildmaß von μ bei T auf $\mathcal{P}(\Omega')$ erklärt. Für z.B. $A' := \{5\}$ ist

$$\mu'(\{5\}) := \mu(\overset{-1}{T}(\{5\})) = \mu(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}) = \frac{4}{36}.$$

Das Bildmaß $\mu'(A')$ zählt die Anzahl der möglichen Summenbildungen mit zwei Zahlen aus $\mathbb{N}_6$ der einzelnen Elemente aus A'.

Es sei konstatiert, dass eine Zufallsvariable weder vom Zufall abhängt noch eine Variable (im Sinne der Algebra) ist! Es ist lediglich eine spezielle messbare Abbildung, die deterministisch jedem Element des Definitionsbereich genau ein Element des Wertebereichs zuweist. Im letzten Beispiel hat die ZV jedem Tupel (i,j) die Summe $i+j$ zugewiesen. Offenbar müssen ZVen weder injektiv noch surjektiv sein.

Die bedeutendste Eigenschaft einer ZV ist im Satz III.1.8 über das Bildmaß formuliert, denn mit Hilfe von ZV lassen sich mit Hilfe der Urbildabbildung W-Maße von einem W-Raum in den anderen transportieren.

Bemerkung: 1. Seien $(\Omega,\mathcal{A})$, $(\Omega',\mathcal{A}')$ Messräume, $T:\Omega\to\Omega'$ eine ZV und $A'\in\mathcal{A}'$. Wie setzen

$$\{T\in A'\} := \overset{-1}{T}(A') = \{\omega|\ T(\omega)\in A'\}$$

und verwenden künftig fast ausschließlich diese Schreibweise.

2. Zudem schreiben wir einfach $P\{T\in A'\}$ anstatt $P(\{T\in A'\})$.

III.2.3 Definition (W-Verteilung): Sei $T:\Omega\to\Omega'$ eine ZV. Das Bildmaß P_T von P bei T heißt die **W-Verteilung** von T bez. P. Es gilt

$$P_T(A') = P(\overset{-1}{T}(A')) = P\{T\in A'\} \qquad \forall A'\in\mathcal{A}.$$

Eine Verteilung ist also ein Bildmaß, wobei auch jedes W-Maß selbst als Verteilung interpretiert werden kann, da die Identität $\mathrm{id}:\Omega\to\Omega$ messbar ist. Ist P_T die Verteilung von T bezüglich P, so sagen wir, dass T unter P nach P_T verteilt bzw. T unter P P_T-verteilt ist.

Literaturverzeichnis

[1] Wahrscheinlichkeitstheorie, Heinz Bauer, 2002, Walter de Gruyter Verlag.

[2] Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, M. Fisz, 1958, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[3] Wahrscheinlichkeitstheorie I, O. Moeschlin et al, 2003, Vorlesungsskript der FernUniversität Hagen.

[4] Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in Beispielen und Aufgaben, Nollau/Partzsch/Strom/Lange, 1997, Teubner Verlagsgesellschaft.

[5] Deskriptive Mengenlehre, Klaus Gloede, 2006, Skriptum zur Vorlesung an der Universität Heidelberg.

[6] Einführung in die Maßtheorie, Ernst Henze, 1970, B.I.-Hochschultaschenbücher.

[7] Einführung in die Mengenlehre, Oliver Deiser, 2006, Springer Verlag.

[8] Maß- und Integrationstheorie, Heinz Bauer, 1992, Walter de Gruyter Verlag.

[9] Kardinal- und Ordinalzahlen, Alexander Hölzle, 2008, http://www.mathematik-netz.de/pdf/KardOrd.pdf.

[10] Einführung in die Mengenlehre, Oliver Deister, 2004, Springer Verlag.