

Stetigkeit in \mathbb{R}

Definition: (Stetigkeit)

Sei $a \in D$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ ist. Sei f eine Abbildung aus $\text{Abb}(D, B)$ mit $B \neq \emptyset$ und $B \subset \mathbb{R}$.

- (i) f heißt stetig im Punkt a , wenn es zu **jeder** Umgebung V von $b := f(a) \in B$ eine Umgebung U von a gibt mit der Eigenschaft

$$f(U \cap D) \subset V \quad \forall x \in U \cap D$$

gilt, also $f(x) \in V$.

- (ii) f heißt **stetig**, wenn die Funktion f für alle $a \in D$ stetig ist.

In Worten:

f ist in einem Punkt a stetig, wenn es zu jeder Umgebung des Bildbereiches von $f(a)$ eine Umgebung U des Definitionsbereiches von a gibt, so dass alle Elemente der Umgebung des Definitionsbereiches von a , in die Umgebung des Bildbereiches von $f(a)$ abgebildet werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass man nur die Elemente der Schnittmenge der Umgebung des Definitionsbereiches mit dem D , abbilden muss.

Stetiges Verhalten einer Funktion f im Punkt a , lässt sich also als ein kontrolliertes Verhalten der Funktion in der Nähe (bzw. einer Umgebung) des Punktes a deuten. Die Funktionswerte $f(x)$ weichen nur wenig vom Sollwert $f(a)$ ab, wenn die Variable x nur genügend nahe bei a liegt.

Um diese Aussage vollständig nachvollziehen zu können, sollte man den Satz der lokalen Trennung und die Definition genau studieren.

Beispiel:

Die Heavisidefunktion $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$H(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Da die Stetigkeit von Natur aus eine lokale Eigenschaft ist, muss man insbesondere die „Randpunkte“ einer Funktion betrachten.

$H(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig. Auf den exakten Nachweis soll an dieser Stelle verzichtet werden, intuitiv ist es aber klar, da es sich um konstante Funktionen handelt.

Wir lenken unsere Aufmerksamkeit also auf den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ für $x_0 = 0$. Damit die Stetigkeit vorliegt, muss es zu jeder beliebigen Umgebung des Bildbereiches von $f(x_0)$ eine Umgebung des Definitionsbereiches um x_0 geben, so dass die Bilder der Elemente der Umgebung des Definitionsbereiches gerade eine Teilmenge von der Umgebung des Bildbereiches um $f(x_0)$ ist.

Wir wählen also für $V := \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$, dann ist V offensichtlich eine Umgebung von $H(0) = 1$. Wir zeigen, dass für keine Umgebung U von 0 die Beziehung $H(U) \subset V$ gelten kann:

Sei U eine Umgebung von $x_0 = 0$. Dann gibt es in U Elemente x mit $x < 0$. Für solche gilt aber $H(x) = 0$ und $0 \notin V$. Also kann $H(U) \not\subset V$ sein.

Proposition

Jede Funktion ist in den isolierten Punkten ihres Definitionsbereiches stetig.

Völlig gleichbedeutend zur Definition der Stetigkeit ist das

Satz (ϵ - δ -Kriterium)

Sei $a \in D$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ ist. Sei f eine Abbildung aus $\text{Abb}(D, \mathbb{R})$.

f ist stetig in $a \in D \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

In Worten: Zu jedem $\epsilon > 0$ lässt sich ein $\delta > 0$ (i. Allgemeinen von ϵ und a abhängig) finden, so dass

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \text{für jedes } x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

Die Bedingung besagt einfach, dass man sich in der Definition der Stetigkeit auf ϵ -Umgebungen von $f(x)$ bzw. die δ -Umgebung von a beschränken kann. Jede Umgebungen enthält schließlich eine Epsilon-Umgebung).

Das zweite Stetigkeitskriterium bringt die Stetigkeit mit der Konvergenz von Folgen in Zusammenhang.

Satz (Folgen-Kriterium)

Sei $a \in D$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ ist. Sei f eine Abbildung aus $\text{Abb}(D, \mathbb{R})$.

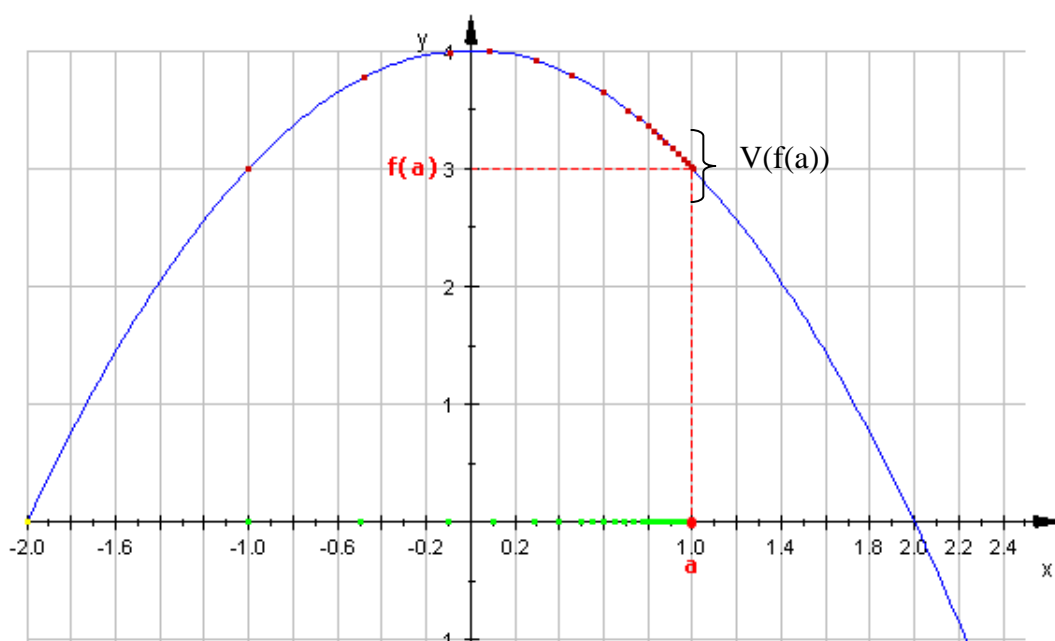
f ist stetig \Leftrightarrow

Für **jede** Folge (x_n) in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Stetigkeit kann daher auch als „konvergenzerhaltend“ interpretiert werden.

Eine graphische Veranschaulichung zeigt die Idee ganz offensichtlich.



Da eine Folge (a_n) [hier grün dargestellt] gegen a konvergiert, liegen fast alle Glieder der Folge in einer beliebigen Umgebung um a .

Endlich viele Ausnahmen spielen keine Rolle bei Konvergenzfragen.

Diese Folgenwerte werden von f abgebildet auf $f((a_n))$.

Da f stetig existiert zu jeder beliebigen Umgebung V eine Umgebung U , so dass U in $f(V)$ abgebildet wird. In U liegen fast alle Folgenglieder von (a_n) , also liegen auch fast alle Folgenglieder von $f((a_n))$ in jeder beliebigen Umgebung von $f(a)$.

Dies ist eine Beweisskizze, kein mathematisch vollständiger Beweis des Folgenkriteriums.

Das Folgen-Kriterium wird i.d.R. dazu verwendet die Unstetigkeit einer Folge in einem Punkt a nachzuweisen.

Beispiel:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x - [x]$, die Gaußklammer-Funktion. Wir untersuchen f an den kritischen Stellen $a \in \mathbb{Z}$. Dazu bilden wir den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} [x] = a$, nach Definition der Gaußklammer-Funktion.

Zeigen Sie mit dem Folgenkriterium, dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{Z}$ unstetig ist. Sei also $a \in \mathbb{Z}$ beliebig vorgegeben. Wir definieren eine Folge $(x_n) := a - \frac{1}{n}$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$. Aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a - \frac{1}{n} - \left[a - \frac{1}{n} \right] \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a - \frac{1}{n} - (a-1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} + 1 \right) = 1 \neq 0 = f(a) = (a - [a]) = (a - a).$$

Mit dem Folgenkriterium ist f an den Stellen $a \in \mathbb{Z}$, daher unstetig.

Beispiel:

- Polynome und rationale Funktionen sind in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig.
- Differenzierbare Funktionen sind notwendig stetig.
- Insbesondere sind Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzbereichs stetig.
- $\text{sgn}(x)$ ist in 0 unstetig, sonst stetig.
- $[x]$ ist an der Stelle $x_0 \in \mathbb{Z}$ unstetig, in allen anderen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig. (siehe Beispiel oben)
- Die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ der rationalen Zahlen ist in ganz \mathbb{R} unstetig.
- Konvexe Funktionen sind im Inneren ihrer Definitionsintervalle stetig.

Definition: (Häufungspunkt)

Sei D eine Teilmenge von \mathbb{R} . Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$, wenn jede ε -Umgebung von a einen von a verschiedenen Punkt aus D enthält.

Satz (Folgen-Kriterium II)

Sei $a \in D$ ein Häufungspunkt, wobei $D \subset \mathbb{R}$ ist. Sei f eine Abbildung aus $\text{Abb}(D, \mathbb{R})$.

f ist stetig in $a \Leftrightarrow$

Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ist.

Beispiel:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{1+x}{1-x}$. Der Punkt $a=1$ ist offensichtlich Häufungspunkt von \mathbb{R} . Dann gilt mit obigem Folgen-Kriterium, dass f in a stetig ist, falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und gleich $f(a)$ ist. Da $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ für $a=1$ nicht existiert ist f somit in $a=1$ unstetig.

Dagegen kann man nachweisen, dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ein Grenzwert existiert und deshalb f auf $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig ist.

Satz: (Stetigkeit als lokale Eigenschaft)

Sei $a \in D \subset \mathbb{R}$, $f \in \text{Abb}(D, \mathbb{R})$ und $a \in W \subset \mathbb{R}$.

- (i) Ist f in a stetig, so ist auch $f|_{W \cap D}$ in a stetig; insbesondere ist im Fall $W \subset D$ die Restriktion $f|_W$ in a stetig.
- (ii) Ist $f|_{W \cap D}$ in a stetig und ist W eine Umgebung von a , so ist auch f in a stetig.

Beispiel:

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig auf $D :=]0, \infty[$.

Sei $W :=]-10, 1]$, dann ist $f|_{W \cap D} = f|_{]0, 1]}$ stetig als Restriktion einer rationalen Funktion.

Sei $W :=]0, 10]$, dann ist $W \subset D$ und deshalb ist $f|_{W \cap D}$ stetig auf ganz W , es gilt also $f|_W$ ist stetig.

Stetige Fortsetzung

Wir haben gesehen, dass die Restriktion von stetigen Funktionen wieder stetig ist. Wir wollen nun die Fragestellung umkehren: Sind $f \in \text{Abb}(D, \mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}$ gegeben, so stellt sich die Frage, ob sich f an der Stelle a so definieren (oder abändern) lässt, dass Stetigkeit in a erzielt wird.

Genauer lässt sich die Frage so formulieren:

Gibt es zu $f \in \text{Abb}(D, \mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}$ eine Funktion $F: D \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = f(x) \quad \text{für jedes } x \in D \setminus \{a\},$$

die in a stetig ist?

Eine ziemlich einfache Antwort lässt sich geben, wenn a kein Häufungspunkt von D ist. Die Antwort ist dann „ja“. Genauer:

Ist a kein Häufungspunkt von D , so ist jede Funktion $F: D \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ in a stetig.

Wenn a kein Häufungspunkt von D ist, folgt, dass es eine Umgebung U von a gibt, die entweder keinen Punkt von D enthält (im Fall $a \notin D$) oder nur a selbst (Fall $a \in D$).

Es gilt also für $U \cap D = \emptyset$ oder $U \cap D = \{a\}$.

Ist also irgendeine Umgebung V von $F(a)$ gegeben, so gilt für solch ein U mit $U \cap D \subset \{a\}$ die Beziehung

$$F(U \cap D) \subset \{F(a)\} \subset V;$$

Daraus folgt die Stetigkeit von F in a .

Beispiel:

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$ mit $D :=]1, 2]$ und sei $a = 0 \in \mathbb{R}$, dann gibt es eine stetige Fortsetzung $F: D \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$ und F ist stetig, da jede Funktion in ihren isolierten Punkten ihres Definitionsbereiches stetig ist. Es gilt $f(x) = F(x)$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$.

Interessant wird die anfangs gestellte Frage also erst, wenn a ein Häufungspunkt von D ist. Diesen Fall untersuchen wir weiter.

Definition: (Stetige Fortsetzung)

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f \in \text{Abb}(D, \mathbb{R})$. Ist a ein Häufungspunkt von D , so gibt es höchstens eine in a stetige Funktion $F: D \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = f(x) \text{ für jedes } x \in D \setminus \{a\}.$$

Falls existent, heißt F die stetige Fortsetzung von f in a .

Äquivalent zur Existenz einer stetigen Fortsetzung ist folgender Satz:

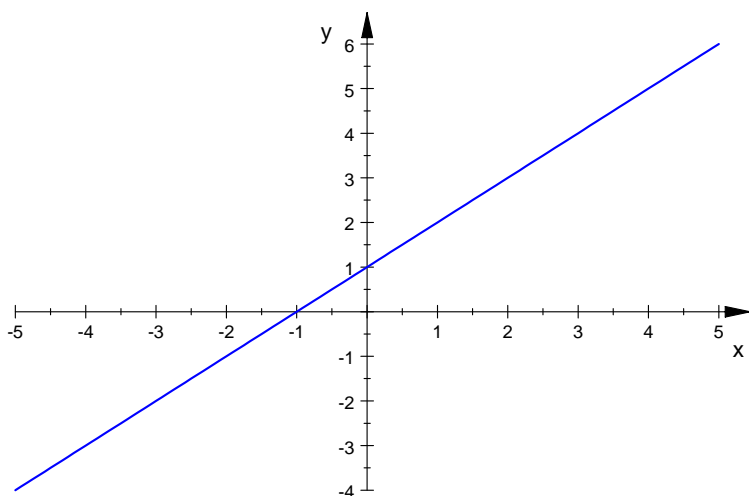
Satz: (Stetige Fortsetzung)

Ist a ein Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$, so heißt $f: D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ in a stetig ergänzbar oder fortsetzbar, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert.

Eine Unstetigkeitsstelle a von f ist hebbar, wenn der Funktionswert $f(a)$ so abgeändert werden kann, dass f in a stetig wird.

Beispiel:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$.



Man sieht, dass im kritischen Punkt $a=1$, nur eine Lücke jedoch keine Polstelle existiert.

Deshalb ist die Funktion auch stetig fortsetzbar. Bei Polstellen (auch Sprungstelle genannt) dagegen, d.h. wenn links- und rechtsseitiger GW different sind, existiert keine stetige Fortsetzung.

Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen stetigen Funktionen f in a , a ist Häufungspunkt, und der Existenz des Grenzwertes von f in a , wie obiger Satz zeigt.

Eine stetige Funktion f kann also in einem beliebigen Punkt a mit Hilfe konstanter Funktionen beliebig genau approximiert werden. Es gilt ja

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= f(a) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) &= 0. \end{aligned}$$

Ausblick:

Die Differenzierbarkeit dagegen ist die Eigenschaft eine Funktion f in a mit Hilfe einer affinen Funktion zu approximieren. Führt man diese Reihe fort, so stößt man unweigerlich auf die so genannten Taylorreihen – mit deren Hilfe kann man Funktionen durch Polynome approximieren.