Einführung in die Theorie der Matroide

Alexander von Felbert

28.11.2007

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und Überblick

Die Theorie der Unabhängigkeitssysteme wurde bereits Anfang der 1930er Jahre von B.L. van der Wearden in seiner legendären zweibändigen Reihe *Moderne Algebra* (siehe [6] und [7]) behandelt; allerdings von einer rein algebraischen Warte aus. Im September des Jahres 1934 publizierte die American Mathematical Society eine Arbeit von Hassler Whitney mit dem Titel *On the Abstract Properties of Linear Dependence* (siehe [5]). Dieses Dokument markiert die eigentliche Geburtsstunde der Theorie der allgemeiner Unabhängigkeitssysteme. Der Autor Whitney schlug damals den Namen „Matroid“ vor, da er sich in seiner Definition allgemeiner Unabhängikeitssysteme auf die Unabhängigkeit der Spaltenvektoren einer **Matr**ix bezog; die Endung **oid** [zu griech. -oiedes = ähnlich] vervöllständigt den Begriff. Davon abweichend ist auch die Bezeichnung „Kombinatorische Geometrie“ geläufig, vor allem bei Gian-Carlo Rota und Henry H. Crapo. Dieses Namensgebung ist offensichtlich durch eine äquivalente geometrische Definition eines allgemeinen Unabhängigkeitssystems motiviert.

Das Standardwerk der Matroid-Theorie ist das von Oxley geschriebene Lehrbuch *Matroid Theory* [1]. Es ist relativ einfach zu lesen und enthält viele Beispiele, welche für das Verständnis vorteilhaft sind. Eine schöne deutschsprachige Einführung in die Theorie der Matroide wurde von Herr Prof. Dr. Winfried Hochstättler im Rahmen seiner Vorlesung an der Universität zu Köln im Wintersemester 1996/1997 verfasst. Das entsprechende Vorlesungsskript basiert auf [1], behandelt jedoch nicht alle Themen aus [1] und ist etwas kürzer gefasst. Interessiert man sich insbesondere für unendliche Matroide, so kann ich das Vorlesungsskript [3] von PD Dr. Matthias Kriesell empfehlen. An dieser Stelle möchte ich mich noch einmal für die Bereitstellung des Skriptes bei Herrn Dr. Kriesell bedanken.

Obwohl viele Definitionen und die wichtigsten Sätze wiederholt und einiges aufgefrischt wird, sollte der Leser grundlegende Kenntnisse der linearen Algebra, der Graphentheorie und der Mengenlehre besitzen. Insbesondere sollte dem Leser, vor Bearbeitung dieses Artikels, bewusst sein, was eine linear unabhängige Menge ist und wie diese charakteriesiert werden kann. Die Rolle der Bäume im Kontext der Graphentheorie sind ebenfalls wichtig, vor allem für das Verständnis von graphischen Matroiden.

Im zweiten Abschnitt *Präliminarien* werden wir die wichtigsten Definitionen und Sätze aus der linearen Algebra, der Graphentheorie und der Mengenlehre wiederholen. Im darauffolgenden Abschnitt *Matroide* wird der zentrale Begriff des gesamten Dokuments definiert und veranschaulicht. Dazu behandeln wir die erste wichtige Klasse von Matroiden, die so genannten Vektormatroide. Ein wesentliches Charakteristikum eines Matroids ist, dass es auf viele äquivalente Arten definiert werden kann (kryptomorph), einige davon werden wir im vierten Abschnitt kennen lernen. Im vorletzten Abschnitt werden wir das –nicht nur für die Matroidtheorie– wichtige Prinzip der Dualität kennen lernen. Schließlich untersuchen wir noch im letzten Abschnitt, wie Verbände und Matroide miteinander korrespondieren.

2 Präliminarien

2.1 Lineare Unabhängigkeit

Sei ein Vektorraum V über einem Körper K gegeben, dann heißt der Vektorraum V **endlich dimensional** über K, wenn es endlich viele Erzeugende $e_1, \ldots, e_m \in V$ gibt, so dass sich jedes Element x aus V mit Koeffizienten k_i aus K ausdrücken lässt:

$$x = \sum_{i=1}^{m} k_i e_i.$$

Man beachte dabei, dass ein Vektorraum gegenüber Summenbildung und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist und deshalb Linearkombinationen, als Summe skalarer Vielfacher der erzeugenden Vektoren, stets wieder Elemente des Vektorraums sind. Sei nun also x dargestellt in der Form $x = \sum_{i=1}^{m} k_i e_i$, dann ist die endliche Familie $(k_1, \ldots, k_m)$ von Körperelementen nicht eindeutig bestimmt, d.h., es gibt im Allgemeinen eine weitere Familie $(k'_1, \ldots, k'_{m'})$ aus $K^{m'}$ mit $x = \sum_{i=1}^{m'} k'_i e_i$ und $m' \in \mathbb{N}$. Um die Eindeutigkeit einer Linearkombination zu ermöglichen, müssen wir notwendig die Menge der Erzeugenden auf deren gegenseitige Abhängigkeit hin untersuchen. So ist z.B. bisher nicht ausgeschlossen worden, dass $e_j = e_i$ für $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt, es kann aber auch sein, dass ein erzeugendes Element als Linearkombination der Übrigen geschrieben werden kann.

Wenn eine der Erzeugenden e_j sich durch die Übrigen ausdrücken lässt, so ist dieser Vektor e_j als erzeugendes Element in dem Vektorraum V **überflüssig**. Reduziert man die Familie $(e_1, \ldots, e_m)$, um alle überflüssigen Erzeugenden, so bleiben schließlich $n \leq m$ Basisvektoren $b_1, \ldots, b_n$ übrig.

Eine Menge von Vektoren, von denen sich keiner durch die übrigen ausdrücken lässt, nennen wir **linear unabhängig**. Sind $b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängige Vektoren, so folgt aus der Gleichung

$$k_1 b_1 + \ldots + k_n b_n = 0$$

notwendig

$$k_1 = 0, \ldots, k_n = 0.$$

Angenommen es wäre nicht jeder Skalar $k_1, \ldots, k_n$ gleich Null, dann gibt es mindestens ein $k_i \neq 0$ mit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir könnten damit nach dem Summand $k_i b_i \neq 0$ auflösen und normieren. Damit hätten hätten wir jedoch b_i durch die übrigen dargestellt, was gemäß Definition nicht sein kann.

Stellt man nun x als Linearkobmination

$$x = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i.$$

von linear unabhängigen Vektoren dar, so ist die Eindeutigkeit der endlichen Familie der Skalare $(k_1, \ldots, k_n)$ garantiert. Sei dazu $x = \sum_{i=1}^{n} k'_i b_i$ eine weitere Darstellung von x

durch die linear unabhängigen Vektoren, dann ergibt sich damit

$$x = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i = \sum_{i=1}^{n} k_i' b_i$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i b_i - \sum_{i=1}^{n} k_i' b_i = \sum_{i=1}^{n} (k_i - k_i') b_i = 0.$$

Da $\{b_1, \ldots, b_n\}$ linear unabhängig sind, muss $(k_1 - k_1') = 0, \ldots, (k_n - k_n') = 0$ gelten, d.h. beide Schreibweisen sind identisch.

2.2 Graphentheorie

In diesem Abschnitt wiederholen wir die wichtigsten Definitionen und Sätze der Graphentheorie, die wir im Weiteren benötigen werden. Zunächst definieren wir einige Bezeichnungen aus der Mengenlehre.

2.1 Definition:

a) Sind A und B Mengen, so bezeichnen wir mit

$$A \times B = \{\ (a,b) |\ a \in A \text{ und } b \in B\ \}$$

das **kartesische** oder **direkte Produkt** von A und B.

b) Im Spezialfall $A = B$ von a) heißt

$$A \times A = \{\ (a,b) |\ a \in A \text{ und } b \in A\ \}$$

die **Menge der geordneten Paare** von Elementen von A. Dabei heißt a das **erste** und b das **zweite Element** des geordneten Paares (a,b). Anstatt (a,b) schreiben wir jedoch meist $a \times b$.

c) Ist A eine Menge, so benötigen wir neben der Menge $A \times A$ der geordneten Paare von Elementen von A die Menge $A \ltimes A$ der **ungeordneten Paare** von Elementen von A, definiert durch

$$A \ltimes A = \{\ \{a,b\} |\ a \in A \text{ und } b \in B\ \}.$$

Die eben eingeführte Notation werden wir in der zentralen Definition dieses Abschnitts benötigen.

2.2 Definition: Ein **ungerichteter Graph** ist ein 3-Tupel $G := (V, K, \delta : K \to V \ltimes V)$. Die Elemente aus V heißen **Knoten** von G, die Elemente aus K Kanten von G und $\delta : K \to V \ltimes V$ nennen wir **Kanteninzidenzabbildung** von G.

Ein Knoten $v \in V$ und eine Kante $k \in K$ heißen **inzident**, wenn $v \in \delta(k)$ gilt.

Zwei *verschiedene* Knoten $v, v' \in V$ heißen **adjazent** oder **benachbart**, wenn es eine Kante $k \in K$ gibt, so dass $v \in \delta(k)$ und $v' \in \delta(k)$ gilt.
Zwei *verschiedene* Kanten $k, k' \in K$ nennen wir **adjazent** oder **benachbart**, wenn es einen Knoten $v \in V$ gibt, so dass $v \in \delta(k)$ und $v \in \delta(k')$ gilt.

Mit Hilfe der Adjazenz zweier Knoten bzw. Kanten kann man die Menge aller „Nachbarn“ definieren.

2.3 Definition: Es sei $G = (V, K, \delta)$ ein Graph.

(i) Für $v' \in V$ setzen wir

$$V_{v'} := \{v \in V |\ v \text{ und } v' \text{ sind adjazent }\} \quad \text{und } \gamma(v') := |V_{v'}|.$$

(ii) Für $k' \in K$ setzen wir

$$K_{k'} := \{k \in K |\ k \text{ und } k' \text{ sind adjazent }\} \quad \text{und } \bar{\gamma}(k') := |K_{k'}|.$$

Wir nennen $\gamma(v')$ den **Knotengrad** des Knotens v' und $\bar{\gamma}(k')$ den **Kantengrad** der Kante k'. Die resultierenden Abbildungen $\gamma : V \to \mathbb{N}$ mit $v \mapsto \gamma(v)$ und $\bar{\gamma} : K \to \mathbb{N}$ mit $k \mapsto \bar{\gamma}(k')$ heißen **Knoten**- bzw. **Kantengradabbildung** von G.

Der Grad $\gamma(v)$ eines Knotens v, ist also die Anzahl der Kanten, welche v als Eckpunkte besitzen. Eine Kante s von einem Knoten v zu demselben Knoten, nennen wir **Schlinge**. Die Inzidenzfunktion einer Schlinge besitzt lediglich einen Knoten als Bild, d.h. es gilt $|\delta(s)| = 1$. Zwei verschiedene Kanten k_1, k_2 heißen **parallel**, wenn $\delta(k_1) = \delta(k_2)$ gilt. Besitzt ein Graph G weder Schlingen noch parallele Kanten, so heißt G **einfacher Graph**.

2.4 Beispiel: Es sei der Graph $G = (V, K, \delta)$ mit

$$\begin{aligned} V &:= \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\} \\ K &:= \{k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ k_5,\ k_6\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\delta(k_1) = \{v_1, v_2\} \quad \delta(k_2) = \{v_2, v_3\} \quad \delta(k_3) = \{v_3, v_4\} \\ &\delta(k_4) = \{v_1, v_4\} \quad \delta(k_5) = \{v_3, v_5\} \quad \delta(k_6) = \{v_4, v_5\}. \end{aligned}$$

Visualisiert man die Elemente aus V durch runde Knoten und die Elemente aus K durch Verbindungslinien zwischen diesen, so kann man z.B. die folgende Darstellung von G erhalten.

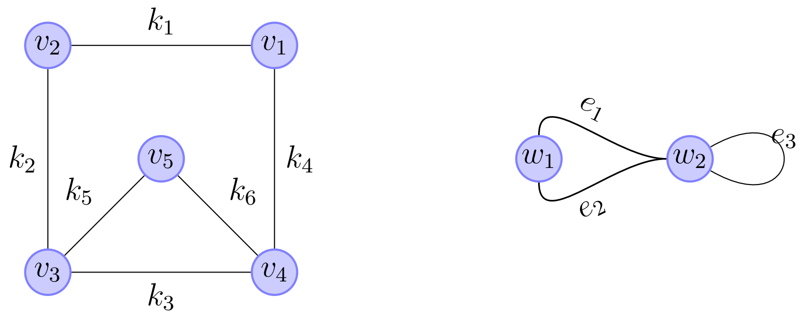


Abb. .1: *Links: Ungerichteter Graph; rechts: Graph mit Schleife und parallelen Kanten*

Die Kante k_1 inzidiert genau mit den Knoten v_1 und v_2, da $\delta(k_1) = \{v_1, v_2\}$, d.h. der Knoten v_5 inzidiert z.B. nicht mit der Kante k_1. Zum Knoten v_3 sind alle Knoten aus $\{v_2, v_4, v_5\}$ adjazent, die Knoten v_1 und v_3 sind jedoch nicht adjazent. Zur Kante k_1 sind genau die Kanten k_2 und k_4 adjazent und keine der Übrigen. Der Knotengrad von v_4 entspricht der Anzahl der Elemente aus $V_{v_4} = \{v_1, v_3, v_5\}$, d.h. $\gamma(v_4) = 3$. Der Kantengrad $\bar{\gamma}(k_3)$ ist gleich 4, da $K_{k_3} = \{k_2, k_4, k_5, k_6\}$ gilt.

Der Grad des Knoten w_2 des Graphen aus Abb. .1 mit Schlinge und parallelen Kanten ist vier, da die Schlinge e_3 doppelt gezählt wird.

Offensichtlich kann ein Graphen auch durch eine Visualisierung definiert werden und so werden wir es in diesem Dokument auch oft halten.

2.5 Definition: Es sei ein Graph $G = (V, K, \delta)$ gegeben.

(i) Eine alternierende endliche Folge $KF: \;\; v_0, k_1, v_1, \ldots, k_n, v_n$ von Knoten $v_i \in V$ und Kanten $k_i \in K$ nennen wir **Kantenfolge der Länge** n von v_0 nach v_n, wenn $\delta(k_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

(ii) Zwei Knoten $v, v' \in V$ heißen **verbindbar**, wenn es eine Kantenfolge von v nach v' gibt. Der Graph G heißt **zusammenhängend** oder **verbunden**, wenn je zwei beliebige Knoten verbindbar sind. Einen nicht zusammenhängender Graphen nennen wir **unzusammenhängend**.

Der Graph aus dem letzten Beispiel ist zusammenhängend, d.h. jeder Knoten ist mit jedem anderen verbindbar.

Sind zwei Knoten $v, v' \in V$ eines Graphen verbindbar, so heißen diese zusammenhangsäquivalent. Dadurch wird eine Äquivalenzrelation erklärt, d.h. die Knotenmenge V zerfällt in eine natürliche Anzahl $n \in \mathbb{N}$ von zueinander disjunkten Äquivalenzklassen V_i, d.h. es gilt

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i.$$

Wir benötigen noch die folgende

2.6 Definition:

(i) Es seien $G = (V, K, \delta : K \to V \ltimes V)$ und $G' = (V', K', \delta' : K' \to V' \ltimes V')$ Graphen. Der Graph G' heißt **Untergraph** von G, notiert durch $G' \subseteq G$, wenn gilt:

a) $V' \subseteq V$ und $K' \subseteq K$.

b) Die Inzidenzabbildung von G' ist eine Restriktion der Inzidenzabbildung von G, d.h. $\forall k' \in K'$ gilt $\delta'(k') = \delta(k')$.

(ii) Sei $G = (V, K, \delta : K \to V \ltimes V)$ mit $V' \subseteq V$, dann heißt

$$G' := (G \cap V') := (V', K', \delta_{|K'} : K' \to V' \ltimes V')$$

wobei

$$K' := \overset{-1}{\delta}(V' \ltimes V') \subseteq K$$

und $\delta_{|K'}$ die Restriktion von δ sind, der von V' **erzeugte** oder **induzierter Untergraph** von G.

(iii) Sei $G = (V, K, \delta : K \to V \ltimes V)$ mit $V' \subseteq V$, dann nennen wir $G \setminus V' = G \cap (V \setminus V')$ den **Kograph** von $(G \cap V')$ oder von V'.

(iv) Sei $G = (V, K, \delta : K \to V \ltimes V)$ mit $K' \subseteq K$, dann heißt

$$(G \cap K) := (V, K', \delta_{|K'} : K' \to V' \ltimes V'),$$

wobei $\delta_{|K'}$ die Restriktion von δ und $V' := \delta_{|K'}(K')$ sind, der von K' **erzeugte Untergraph** von G.

(v) Sei $G = (V, K, \delta : K \to V \ltimes V)$ mit $K' \subseteq K$, dann nennen wir $G \setminus K' = G \cap (K \setminus K')$ den **Kograph** von $(G \cap K')$ oder von K'.

Betrachten wir also die durch die Zusammenhangsäquivalenz induzierten Untergraphen $G_i := (G \cap V_i)$, so stellen wir fest, dass diese maximal zusammenhängende Untergraphen von G sind und deren disjunkte Vereinigung gerade G ergibt.

2.7 Definition: Es sei $G = (V, K, \delta)$ ein Graph. Dann heißt ein maximal zusammenhängender Untergraph von G eine **Komponente** von G und die wohlbestimmte Anzahl verschiedener Komponenten von G wird durch $\operatorname{komp}(G)$ bezeichnet. Schließlich heißt $|V| - \operatorname{komp}(G)$ der **Rang** von G und wird durch $rg(G)$ notiert.

Spezielle Kantenfolgen spielen in der Graphentheorie und auch in diesem Dokument eine große Rolle.

2.8 Definition: Es sei ein Graph $G = (V, K, \delta)$ gegeben. Es sei $KF :\ v_0, k_1, v_1, \dots, k_n, v_n$ eine Kantenfolge in G. Dann heißt eine Kantenfolge KF

(i) ein **Kantenzug**, wenn alle Kanten k_i für $i = 1, \dots, n$ untereinander verschieden sind,

(ii) ein **Kantenweg** oder kurz **Weg**, wenn alle Knoten v_i für $i = 0, \dots, n$ untereinander verschieden sind,

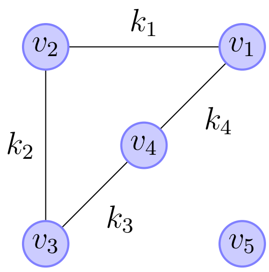
(iii) **geschlossene Kantenfolge**, wenn $v_0 = v_n$ gilt,

(iv) ein **geschlossener Kantenzug**, wenn sie geschlossen ist und alle Kanten k_i untereinander verschieden sind,

(v) ein **Kantenkreis** oder kurz **Kreis**, wenn sie ein nicht trivialer geschlossener Kantenzug ist und alle Knoten v_i für $i = 1, \dots, n$ untereinander verschieden sind.

Ein Beispiel wird die einzelnen Begriffe veranschaulichen.

2.9 Beispiel: Der Graph $G = (V, K, \delta)$ gegeben durch



ist unzusammenhängend mit $rg(G) = 2$, da der Knoten v_5 mit keinem anderen Knoten verbindbar ist. Die maximalen Untergraphen von G sind die von dem einzelnen Knoten v_5 und der Knotenmenge $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ induzierten Graphen.
Die Kantenfolge $KF: \ v_1, k_1, v_2, k_2, v_3, k_3, v_4, k_4, v_1$ von v_1 nach v_1 ist ein Kantenzug, da KF jede Kante genau einmal enthält. KF ist jedoch kein Weg, da Anfangs- und Endknoten identisch sind. Deshalb ist KF aber eine geschlossene Kantenfolge und somit auch ein geschlossener Kantenzug. Da bis auf den Anfangs- und Endknoten der Kantenfolge KF sämtliche Knoten verschieden sind ist KF ein Kreis.

Graphisch bestimmen wir nun noch den durch die Knotenteilmenge $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ erzeugten Graph $G \cap \{v_1, v_2, v_3\}$, sowie den Kographen $G \setminus \{v_4\} = G \cap \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ (vgl. Abb. .2).

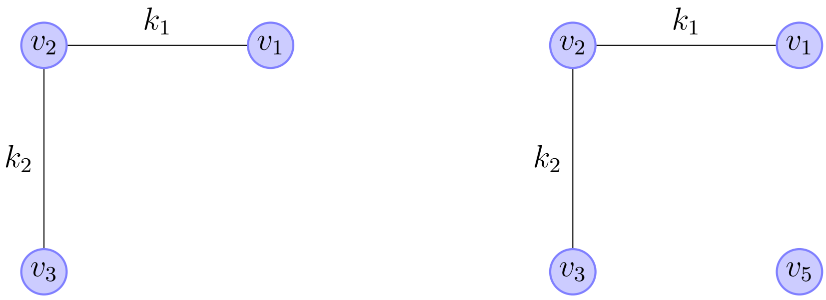


Abb. .2: *Links* $G \cap \{v_1, v_2, v_3\}$, *rechts* $G \setminus \{v_4\}$

Als nächstes untersuchen wir ein wichtige Klasse von Graphen.

2.10 Definition: Ein Graph $B = (V, K, \delta)$ heißt **Baum**, wenn es *von* jedem *zu* jedem Knoten genau einen Kantenweg gibt.

Die Charakterisierung von Bäumen wird im Zusammenhang mit von Graphen induzierten Matroiden von Bedeutung sein. Ein Graph G heißt **maximal kreislos**, wenn G keinen Kreis enthält und zu jeder zusätzlicher Kante k, zwischen zwei in G nicht adjazenten Knoten, es ein Kreis in G existiert der k enthält. Ein Graph G heißt **minimal zusammenhängend**, wenn G zusammenhängend ist und für jede Kante $k \in K$, ist der Graph G ohne die Kante k unzusammenhängend.

2.11 Proposition: Es sei $B = (V, K, \delta)$ ein endlicher Graph, d.h. $|V|, |K| \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(i) B ist ein Baum.

(ii) B ist maximal kreislos.

(iii) B ist kreislos mit $|V| = |K| - 1$.

(iv) B ist minimal zusammenhängend.

(v) B ist zusammenhängend mit $|V| = |K| - 1$.

2.3 Ordnungen und Verbände

Unter einer **Teilordnung** (auch Halbordnung, partielle Ordnung oder Ordnungsrelation) in der Menge X versteht man eine Teilmenge R von $X \times X$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Es ist $(x, x) \in R$ für alle $x \in X$, (Reflexivität)

(ii) Aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ folgt $x = y$, (Antisymmetrie)

(iii) Aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ folgt $(x, z) \in R$. (Transitivität)

Anstelle von $(x,y) \in R$ notiert man die Relation in der Infixschreibweise $x\ R\ y$, wobei wir meist das Symbol „$\leq$" anstatt R verwenden werden. Das Paar $(X, \leq)$ nennt man **halbgeordnete Menge** und das Symbol $x < y$ bedeutet $x \leq y$ *und* $x \neq y$.

Die Forderungen (i), (ii) und (iii) sind anschauliche Bedingungen, die man an eine Relation stellen würde, wenn es um Größenvergleiche geht. Dabei ist es zunächst durchaus zugelassen, dass zwei Elemente aus X gar nicht miteinander verglichen werden können, d.h., dass weder $x \leq y$ noch $y \leq x$ gilt. Gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$, so nennen wir x und y **vergleichbar** und sonst **unvergleichbar**. Eine geordnete Menge X heißt genau dann **total geordnet** oder **linear geordnet**, wenn für *alle* Elemente $x, y \in X$ entweder die Beziehung $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt (Trichotomie), d.h., wenn jedes Element aus X mit jedem anderen Element vergleichbar ist.

2.12 Beispiel: Es sei X eine Menge.

a) Sei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X mit der Inklusion „$\subseteq$" als Relation. Dann ist $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ eine halbgeordnete Menge, die Inklusion bildet also eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(X)$.

b) Sei $X := \{1,2,3\}$, dann besteht die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ aus insgesamt acht Teilmengen, im Einzelnen sind das

$$\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}.$$

Das Paar $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ist *keine* Totalordnung, da z.B. $\{1\}$ nicht mit der Teilmenge $\{2,3\}$ verglichen werden kann, d.h. es gilt weder $\{1\} \subseteq \{2,3\}$ noch $\{1\} \supseteq \{2,3\}$.

c) Betrachten wir nun die Relation $\leq$ auf der Menge $\mathbb{Z}$ definiert durch

$$x \ \leq\ y :\Leftrightarrow\ y - x \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist $(\mathbb{Z}, \leq)$ eine total geordnete Menge.

Sei nun $M \subseteq X$ und $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge.
Gilt $m \leq o$ für alle $m \in M$ und festes $o \in X$, dann heißt o eine **obere Schranke von** M. Schließlich heißt $u \in X$ genau dann eine **untere Schranke von** M, wenn $u \leq m$ für alle $m \in M$ gilt. Die Teilmenge M heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine obere Schranke von M gibt, entsprechend heißt M **nach unten beschränkt**, wenn eine untere Schranke existiert. Ist M nach unten und oben beschränkt, dann heißt M **beschränkt**.

Existiert eine kleinste untere Schranke $u^* \in X$ von $M \subseteq X$, so nennen wir diese **Infimum** von M und schreiben $\inf(M) := u^*$. Existiert das Infimum $\inf(M)$ einer Menge M, dann ist $\inf(M)$ selbst eine untere Schranke und es gilt $u \leq \inf(M)$ für alle unteren Schranken u von M. Eine größte obere Schranke $o^* \in X$ von $M \subseteq X$ nennen wir **Supremum** von M und schreiben $\sup(M) := o^*$. Gibt es das Supremum $\sup(M)$ einer Menge M, so ist $\sup(M)$ selbst eine obere Schranke und es gilt $\sup(M) \leq o$ für alle oberen Schranken o von M. Supremum und Infimum einer Menge M sind eindeutig bestimmbar, sofern die Existenz gesichert ist. Eine obere Schranke o der Teilmenge $M \subseteq X$ mit

$o \in M$ ist ein **größtes Element** von M. Entsprechend heißt ein Element **kleinstes Element** von M, wenn eine untere Schranke u von M gleichzeitig ein Element der Menge ist. In halbgeordneten Mengen sind größte und kleinste Elemente (sofern sie existieren) wegen der Antisymmetrie eindeutig bestimmt.

Ein Elemente $x_{min} \in M$ ist **minimal**, falls es *kein* $y \in M$ mit $y \leq x_{min}$ und $x_{min} \nleq y$ gibt. Entsprechend heißt ein Element $x_{max} \in M$ **maximal**, falls es *kein* $y \in M$ mit $x_{max} \leq y$ und $y \nleq x_{max}$ gibt. Eine halbgeordnete Menge $(X, \leq)$ kann mehrere minimale oder maxiamle Elemente von Teilmengen $M \subset X$ besitzen, da nicht alle Elemente miteinander vergleichbar sein müssen.

Besitzt die Halbordnung $(X, \leq)$ ein global minimales Element $0 \in X$, so nennen wir dieses **Nullelement**. Analog nennen wir das global maximale Element **Einselement** von X und notieren es kurz durch 1. Die Namensgebung ist aus der Algebra entlehnt. Null- als auch Einselement sind eindeutig bestimmbar. Einer der wohl bedeutendsten Sätze in diesem Zusammenhang ist das berühmte

2.13 Lemma: (von ZORN)
Die geordnete nicht leere Menge X besitzt ein maximales Element, falls jede total geordnete Teilmenge von X eine obere Schranke besitzt.

Ist $x \leq y$ in $(X, \leq)$, so nennen wir die *Unterordnung* der Menge $\{a \in X | \ x \leq a \leq y \ \}$ das **Intervall** $[x, y]$ von x und y in X. Die Intervalle $[x, x]$ heißen **trivial**. Gilt für $x \leq y$, dass $|[x, y]| = 2$, d.h. folgt aus $x \leq a \leq y$, dass $a = x$ oder $a = y$ ist, so sagen wir, y **bedeckt** x und notiere dies durch $x <_\bullet y$. Ein Element $x \in X$ heißt **Atom** von X, wenn x das Nullelement bedeckt. Ein Element der Halbordnung nennen wir **Coatom** oder **Copunkt**, wenn dieses vom Einselement bedeckt wird.

Eine *total geordnete* Teilmenge $\mathcal{K} := \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ einer *halbgeordnete* Menge $(X, \leq)$ nennen wir **Kette der Länge** n. Man beachte, dass alle Elemente der Kette CK unterschiedlich sind! So ist z.B. $\{ \ \varnothing, \ \{1\}, \ \{1,2\}, \ \{1,2,3\} \ \}$ eine Kette der Länge 3 von $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$. Ketten der Länge n sind bis auf Isomorphie eindeutig. Eine Kette $\mathcal{K} := \{x_0 <_\bullet x_1 <_\bullet \ldots <_\bullet x_n\}$ heißt nicht weiter **unterteilbar** oder **maximal**. Wir sagen, dass ein Element $a \in X$ eine endliche Höhe in $(X, \leq)$ besitzt, wenn die Längen aller Ketten mit letztem Glied a nach oben beschränkt sind. Die **Höhe** $h(a)$ **eines Elements** $a \in X$ ist die maximale Länge einer Kette vom Nullelement 0 zu a.

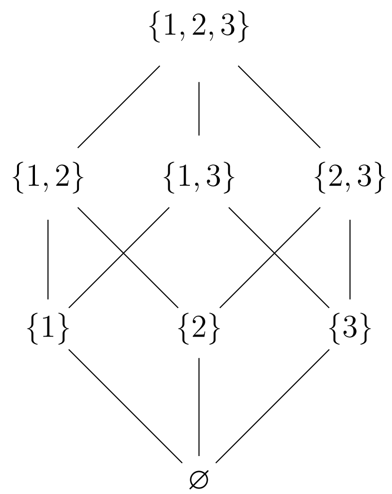
Sind je zwei verschiedene Elemente aus $A \subseteq X$ nicht vergleichbar, so nennen wir A eine **Antikette**. Mit Hilfe der Definition einer Kette können wir das Proposition von ZORN auch wie folgt formulieren.

> *Jede nicht leere, halbgeordnete Menge, bei der jede Kette eine obere Schranke besitzt, hat ein maximales Element.*

Wir sagen, dass eine Halbordnung $(X, \leq)$ die **Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung** erfüllt, wenn *alle* maximalen Ketten zwischen zwei Elementen dieselbe endliche Länge besitzen.

Eine endliche halbgeordnete Menge $(X, \leq)$ kann mit durch ein Diagramm $H_\leq$ repräsentieren. Die Elemente von X werden als Knoten dargestellt und für $x, y \in X$ soll gelten: $x \leq y$ genau dann, wenn man von x längs einer aufwärts gerichteten Strecke zu y gelangen kann. Überbrückungsverbindungen werden dabei ausgelassen, gilt also $x \leq y \leq z$ so zeichnen wir zwei aufwärtsgerichtete Strecken von x nach y und von y nach z, jedoch keine direkte Verbindung von x nach z. Da für alle $x \in X$ die Relation $x \leq x$ erfüllt ist, wird diese nicht durch eine Verbindungsstrecke veranschaulicht. Ein Diagramm, welches eine endliche halbgeordnete Menge $(X, \leq)$ repräsentiert, nennen wir **Hasse-Diagramm** von $(X, \leq)$.

2.14 Beispiel: Wir betrachten das Hasse-Diagramm zur Halbordnung $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$.



Die bezüglich der Inklusion größte Teilmenge $X := \{1,2,3\}$ ist an der Spitze des Diagramms zu finden. Da jedes weitere Element aus $\mathcal{P}(X)$ eine echte Teilmenge von X ist, besteht auch von jedem dieser Elemente eine aufwärtsgerichtete Verbindungslinie zu X. Elemente auf einer Ebene, wie z.B. $\{1,3\}$ und $\{2,3\}$ können nicht miteinander verglichen werden, deshalb existiert in dem Diagramm auch keine aufwärtsgerichtete Verbindungslinie. Das Intervall $[\{1\}, \{1,2,3\}]$ ist eine Unterordnung, bestehend aus den drei Mengen $\{1\}, \{1,2\}$ und $\{1,2,3\}$. Entsprechend ist $[\{1,2\}, \{1,2,3\}]$ ein triviales Intervall, d.h. $\{1,2,3\}$ bedeckt $\{1,2\}$. Die leere Menge ist das Nullelement und X ist das Einselement von $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Das Element $\{1,3\}$ besitzt die Höhe 1, da $\{\varnothing \lessdot \{1\} \lessdot \{1,3\}\}$ eine maximale Kette vom Nullelement zu $\{1,3\}$ ist. Da die Elemente $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{3\}$ das Nullelement bedecken, sind diese Atome von $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$. Ferner sei konstatiert, dass die Halbordnung $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}, \subseteq)$ die Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung erfüllt.

Ausgehend von einer Halbordnung $(X, \leq)$ können wir eine wichtige algebraische Struktur definieren, den sog. Verband.

2.15 Definition: Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung. Für $x, y \in X$ seien $x \vee y := \sup(x, y)$ die **Vereinigung** von x und y und $x \wedge y := \inf(x, y)$ der **Schnitt** von x und y.

Sind die Vereinigung und der Schnitt abgeschlossen auf der Halbordnung, so sind diese binäre innere Verknüpfungen.

2.16 Definition: Ein **Verband** $L_{\leq}$ ist eine Halbordnung $(L, \leq)$ mit der Eigenschaft, dass je zwei Elemente $a, b \in L$ sowohl ein Infimum als auch ein Supremum besitzen. Der Schnitt und die Vereinigung sind also innere Verknüpfungen auf der Menge L. Ein Verband heißt **vollständig**, falls $\inf(A)$ und $\sup(A)$ für alle Teilmengen $A \subseteq L$ existiert.

Aus der Definition folgt direkt, dass, für eine jede endliche Untermengen eines Verbandes L, die Existenz von Infima und Suprema garantiert ist. Weiter gilt: ein Verband $L_{\leq}$ ist genau dann vollständig, wenn $L_{\leq}$ ein Einselement besitzt und $\inf(A)$ für alle $A \subseteq L$ existiert. Es ist also jeder endliche Verband vollständig. Ein Verband ist **atomar**, wenn jedes Element dem Supremum der Atome, die mit ihm in Relation stehen, entspricht.

2.17 Proposition: Sei X eine Menge, dann gilt für die Halbordnung $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$:

(i) $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$ entspricht dem Supremum $A \vee B$ gerade der Vereinigung $A \cup B$ der Mengen.

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$ entspricht dem Infimum $A \wedge B$ gerade dem Schnitt $A \cap B$ der Mengen.

Beweis. Ad (i): Natürlich gilt $A, B \subseteq (A \cup B)$, d.h. $(A \cup B)$ bildet eine obere Schranke für $\{A, B\}$. Sei nun $C \in \mathcal{P}(X)$ eine weitere obere Schranke von $\{A, B\}$, d.h. auch hier sind die Mengen A, B in C enthalten, womit auch $(A \cup B) \subseteq C$ erfüllt sein muss. Es ist also $(A \cup B)$ die bezüglich der Inklusion kleinste obere Schranke.

Ad (ii): Analog. □

2.18 Definition: Es sei X eine endliche Menge, dann ist die Halbordnung $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ zusammen mit

$$A \vee B := (A \cup B) \qquad \text{(Vereinigung)}$$
$$A \wedge B := (A \cap B) \qquad \text{(Durchschnitt)}$$

ein vollständiger Verband $\mathcal{P}(X)_{\subseteq}$, welchen wir **Boolesche Algebra von** X (oft auch Boolescher Verband) nennen.

Beweis. Da die Vereinigung sowie der Schnitt zweier Teilmengen von X wieder eine Teilmenge von X ist, folgt mit Proposition 2.17 die Behauptung. □

Man beachte, dass für die Boolsche Algebra $\mathcal{P}(X)_{\subseteq}$ die Rechenregeln

$$\emptyset \vee A = A = A \vee \emptyset,$$
$$X \wedge A = A = A \wedge X$$

für alle $A \subseteq X$ gelten. Im Hinblick auf die Namensgebung aus der Algebra sollte klar sein, warum $\emptyset$ als Nullelement und X als Einselement bezeichnet wird.

3 Matroide

Alle betrachteten Mengen in diesem Dokument seien endlich; es sei denn, es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Menge nicht endlich ist. Die überwiegende Mehrheit der Literatur behandelt Matroide mit endlicher Grundmenge, es sei jedoch darauf hingewiesen, dass man auch für unendliche Grundmenge sinnvoll ein Matroid definieren kann. Allerdings existieren schwerwiegende Gründe sich zunächst auf den endlichen Fall zu beschränken, da ansonsten viele wesentliche Konzepte gar nicht oder nur erschwert eingeführt werden können.

3.1 Definition und Beispiele

Durch Abstraktion können erstaunliche Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Disziplinen der Mathematik, wie z.B. der Algebra, der projektiven Geometrie oder der Graphentheorie, aufgedeckt werden. So können viele bekannte Muster der linearen Algebra auch in Graphentheorie oder aber in der Geometrie wiederentdeckt werden. Extrahiert man die gemeinsamen Grundsätze und fasst diese zu einem abstrakten Axiomensystem zusammen, so erhält man die Grundlage für ein Studium das viele Zweige der Mathematik miteinander verknüpft.

3.1 Definition (Matroide): Seien E eine nicht leere endliche Menge und $\mathcal{I}$ Teilemenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$. Das Tupel $(E,\mathcal{I})$ heißt **Matroid** oder **Unabhängigkeitssystem** bzw. **Unabhängigkeitsstruktur**, wenn die folgenden drei Punkte erfüllt sind:

(M1) $\varnothing \in \mathcal{I}$, d.h. $\mathcal{I}$ ist nicht leer.

(M2) Das Mengensystem $\mathcal{I}$ ist *erblich* oder *hereditär*, d.h. es gilt:
$X \subseteq Y \subseteq E$ und $Y \in \mathcal{I} \Rightarrow X \in \mathcal{I}$.

(M3) Es gilt der (endliche) *Ergänzungssatz*:
$X, Y \in \mathcal{I}$ und $|X| > |Y| \Rightarrow \exists x \in X \setminus Y$, so dass $Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Die Elemenete aus $\mathcal{I}$ nennen wir **unabhängig** und die Elemente aus $\mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{I}$ **abhängig**.

Bitte beachten Sie, dass die unabhängigen bzw. abhängigen Elemente Mengen sind und im Allgemeinen nichts mit der linearen Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit zu tun haben. Einige Beispiele werden die Definition veranschaulichen.

3.2 Beispiel:

a) Das Tupel $(E, \mathcal{I} := \mathcal{P}(E))$ ist ein Matroid, da $\mathcal{I}$ offensichtlich die leere Menge enthält, erblich ist und der Ergänzungssatz gilt. Da $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ gilt ist auch der Spezialfall $(\varnothing, \{\varnothing\})$ ein Unabhängigkeitssystem. Beide Matroide nennen wir **trivial**.

b) Seien $E := \{1,2,3\}$ und $\mathcal{I} := \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$, dann ist $(E,\mathcal{I})$ ein Matroid. Die leere Menge ist in $\mathcal{I}$ enthalten, ebenso kann man an Hand der Definition von $\mathcal{I}$ erkennen, dass das Mengensystem erblich ist. Durch manuelles Nachprüfen kann sich von der Gültigkeit des Ergänzungssatzes überzeugen. Die Menge $\mathcal{I}$ beinhaltet alle unabhängigen Menge und $\mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{I} = \{\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ ist die Menge der abhängigen Mengen.

3.2 Matroide aus Vektorräumen

Mit Hilfe der linearen Unabhängigkeit können wir *spezielle* Unabhängigkeitssystem konstruieren, sodann fallen die lineare Unabhängigkeit und die Unabhängigkeit im Sinne der Definition eines Matroids 3.1 zusammen.

Bemerkung:

a) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K, $E \subseteq V$ eine *endliche* Teilmenge und $\mathcal{I} := \{X \subseteq E | \; X$ ist linear unabhängig $\}$, dann ist $(E,\mathcal{I})$ ein Matroid.

b) Seien V ein Vektorraum über einem Körper K und $(v_i)_{i\in E}$ eine beliebige aber fixierte Familie von Elementen aus V mit *endlicher* Indexmenge E, welche im endlichen Fall auch als Spaltenvektoren in Matrixform gegeben sein können. Dann ist $(E,\mathcal{I})$ mit $\mathcal{I} :=\{I \subset E | (v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig$\}$ ein Matroid.

Matroide, die mit Hilfe eines Vektorraums V gebildet wurden, nennen wir auch **Vektormatroid** und notieren diese durch $M[V]$. Matroide aus Vektorräumen, die mit Hilfe einer Matrix A bzw. dessen Spaltenvektoren representiert sind, notieren mit $M[A]$.

Beweis. Ad a): Die Erblichkeit ist evident, da jede Teilmenge einer linear unabhängigen Teilmenge wieder linear unabhängig ist. Weiter ist die leere Menge stets linear unabhängig aufgrund von Mangel an Elementen.

Den Ergänzungssatz zeigen wir durch Widerspruch. Dazu nehmen wir zunächst an, dass der Ergänzungssatz nicht gelten würde, d.h. es gibt Mengen $S,T \in \mathcal{I}$ mit $|S| > |T|$. O.B.d.A. seien $S := \{s_0,\dots,s_n\}$ und $T := \{t_0,\dots,t_{n-1}\}$. Nach Annahme gibt es kein $s \in S$, so dass $T \cup \{s\}$ linear unabhängig wäre, d.h. ein jedes $s \in S$ ist linear abhängig von $\{t_1,\dots,t_{n-1}\}$. Dies wiederum impliziert, dass ein jedes s_j mit $j = 0,\dots,n$ sich als Linearkombination der Vektoren aus T schreiben lässt:

$$s_j = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i,j}) \; t_i.$$

Ein jeder Vektor s_j ist durch die Koeffizienten $\alpha_{0,j},\dots,\alpha_{n-1,j}$ als Linearkombination eindeutig definiert. Aus all diesen Koeffizienten α_{ij} mit $i = 0,\dots,n-1$ und $j = 0,\dots,n$ bilden wir nun ein lineares homogenes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (\alpha_{0,0}) \; x_0 + \; \dots \; &+ (\alpha_{0,n}) \; x_n = 0 \\ &\vdots \\ (\alpha_{n-1,0}) \; x_0 + \; \dots \; &+ (\alpha_{n-1,n}) \; x_n = 0 \end{aligned} \tag{LG}$$

Da mehr Unbekannte als Gleichungen existieren, besitzt (LG) auf jeden Fall eine nicht triviale Lösung

$$x := \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Die Menge S ist gemäß Definition linear unabhängig, doch für irgendeine nicht tiviale Lösung x gilt

$$\sum_{j=0}^{n} x_j s_j = \sum_{j=0}^{n} \left(x_j \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i,j}) \; t_i \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (\alpha_{i,j}) x_j}_{=0} \; t_i = 0,$$

was im Widerspruch zu $S \in \mathcal{I}$ steht. Es folgt die Gültigkeit des Ergänzungssatzes.

Ad b): Sämtliche Axiome lassen sich mit Hilfe der bereits bewiesenen Bemerkung a) zeigen. Es ist $\varnothing \subset E$ und $(v_i)_{i \in \varnothing} = \varnothing$ linear unabhängig. Die Erblichkeit ist klar, denn sind die Vektoren aus einer Familie $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig, dann auch die aller Teilfamilien. Ist also die Indexmenge I in $\mathcal{I}$ enthalten, dann auch jede Teilmenge I' von I. Seien nun $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_2| > |I_1|$, wir können o.B.d.A. $I_2 := \{0, \ldots, n\}$ und $I_1 := \{0, \ldots, n-1\}$ setzen. Dann existiert ein $i \in I_2 \setminus I_1$, so dass $I_1 \cup \{i\}$ ebenfalls in $\mathcal{I}$ liegt. Dies folgt unmittelbar aus dem bereits in a) Gezeigtem. □

3.3 Beispiel: Wir betrachten die Spaltenvektoren der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{R}$ und bezeichnen diese wie folgt:

$$v_1 := (1,0,0)^T, \qquad v_2 := (0,1,0)^T,$$
$$v_3 := (1,1,0)^T, \qquad v_4 := (0,0,1)^T.$$

Daraus ergibt sich die Menge $E = \{1,2,3,4\}$ sowie die Menge

$$\mathcal{I} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\{1,2,3\};\{1,2,3,4\}\},$$

da genau die beiden Vektormengen $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig sind.

Eine einelementige Menge in einem K-Vektorraum V ist genau dann linear abhängig, wenn sie den Nullvektor von V enthält. Sind zwei oder mehrere Vektoren in einem Vektorraum skalare Vielfache voneinander, so ist die Menge dieser Vektoren ebenfalls linear abhängig. Entsprechend sind eine Nullspalte und skalare Vielfache bzw. dessen Indizes in einem Matroid abhängig.

3.4 Definition: Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $x \in E$, dann heißt x eine **Schleife** von M, wenn die Menge $\{x\}$ nicht unabhängig ist, d.h. wenn $\{x\}$ abhängig ist. Zwei Elemente $x, y \in E$, welche keine Schleifen sind, heißen **parallel**, wenn die Menge $\{x, y\}$ nicht unabhängig ist, d.h. wenn $\{x, y\}$ abhängig ist.

Betrachten wir die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei wir die Spaltenvektoren von links nach recht mit v_1, v_2 und v_3 bezeichnen und $v_i \in \mathbb{R}^2$ für $i = 1, 2, 3$ gilt. Im Matroid $M[A]$ sind $\{2\}$ und $\{1, 3\}$ offensichtlich abhängig, denn die Vektormengen $\{v_2\}$ und $\{v_1, v_3\}$ sind es. Es sind $\{2\}$ eine Schleife und $\{1, 3\}$ parallele Elemente von M.

Matroide die aus Vektorräumen induziert werden, nennt man auch darstellbar oder repräsentierbar. Die nächste Definition wird diesen Begriff klären.

3.5 Definition: Ein Matroid M heißt **darstellbar** über einem Körper K, wenn M isomorph zu einem Vektormatroid $M[A]$ für eine Matrix A über dem Körper K ist.

Dabei ist ein Isomorphismus $\psi : E(M) \to E(N)$ von Matroiden M und N genau das, was man wohl erwarten würde: eine Bijektion ψ zwischen den Grundmengen, welche die Eigenschaft Unabhängigkeit respektiert, d.h. $X \subseteq E$ ist unabhängig genau dann, wenn $\psi(X)$ es ist.

4 Axiomatik der Matroide

4.1 Axiome des Basissystems

Ein jeder Vektorraum besitzt eine Basis und die Mächtigkeit aller Basen eines Vektorraumes ist stets gleich. Ein analoges Ergebnis existiert auch für Matroide und deren „Basen" – doch zunächst müssen wir den zentralen Begriff dieses Teilabschnitts klären.

4.1 Definition: Sei $M := (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $B \in \mathcal{I}$ eine Teilmenge von E. Dann heißt B eine **Basis** von M, wenn es kein $I \in \mathcal{I}$ gibt mit $B \subsetneq I$. Die *Menge aller Basen* eines Matroids M notieren wir durch $\mathcal{B}$.

Eine Basis ist also ein bezüglich der Mengeninklusion $\subseteq$ maximales Element des Mengensystems $\mathcal{I}$. Das Mengensystem $\mathcal{P}(E)$ besitzt genau $2^{|E|}$ Teilmengen von E und ist damit endlich, da die Grundmenge E eines Matroids endlich ist. Somit existieren auch maximale Elemente des Mengensystems $\mathcal{I}$, d.h. die *Existenz einer Basis* ist stets sichergestellt. Der Beweis des folgenden Satzes ist recht einfach, wenn man sich das Axiom (M3) der Definition 3.1 vergegenwärtigt.

4.2 Satz: Sind B und B' zwei Basen eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$, so ist besitzen beide Mengen dieselbe Kardinalität, d.h. es gilt $|B| = |B'|$.

Beweis. Angenommen die Aussage stimmt nicht und es gelte o.B.d.A. $|B'| < |B|$, dann existiert aufgrund der Eigenschaft (M3) der Definition 3.1 mindestens ein $x \in B \setminus B'$, so dass $B' \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ gilt. Das steht jedoch im Widerspruch zur Definition und der damit einhergehenden Maximalität einer Basis. Die Annahme war also falsch und damit ist gezeigt, dass $|B'| = |B|$ gilt. ☐

4.3 Beispiel: Wir setzen $E := \{1, 2, 3, 4\}$ und

$$\mathcal{I} := \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{3, 4\}\},$$

dann ist $M := (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Alle sechs zweielementigen Mengen sind Basen des Matroids M, da diese gerade die maximalen Elemente aus $\mathcal{I}$ sind, d.h. diese Teilmengen von E besitzen keine echten unabhängigen Obermengen.

4.4 Proposition: Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Basen eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$. Dann gilt:

(B1) $\mathcal{B} \neq \varnothing$

(B2) Für alle Basen $B, B' \in \mathcal{B}$ gilt:
$\forall x \in B \setminus B'$ existiert ein $y \in B' \setminus B$, so dass $B \setminus \{x\} \cup \{y\}$ in $\mathcal{B}$ liegt.

Beweis. Ad (B1): Gemäß Definition eines Matroids gilt $\varnothing \in \mathcal{I}$, d.h. im Fall $\mathcal{I} = \{\varnothing\}$ erfüllt $\varnothing$ die Voraussetzungen einer Basis.

Ad (B2): Es sei $x \in B \setminus B'$, d.h. $x \in B$ aber $x \notin B'$. Alle Basen besitzen nach Satz 4.2 dieselbe Anzahl an Elementen aus E, d.h. es gilt $|B| = |B'|$ und damit $|B \setminus \{x\}| < |B'|$, wobei die Teilmenge $B \setminus \{x\}$ unabhängig ist. Die Voraussetzungen von (M3) sind also erfüllt und es folgt somit, dass ein $y \in B' \setminus (B \setminus \{x\}) = B' \setminus B$ existiert, so dass $B'' := (B \setminus \{x\} \cup \{y\}) \in \mathcal{I}$ eine unabhängige Menge ist. Basen sind die maximal unabhängigen Teilmengen von E die stets dieselbe Anzahl an Elementen enthalten. Nimmt man nun also an, dass B'' keine Basis wäre, dann würde mit dem Satz 4.2 ein Widerspruch zur Mächtigkeit folgen. Es ist also B'' eine Basis. ☐

Die Bedingung (B2) wird auch häufig als der verallgemeinerte Steinizsche Austauschsatz und beide Bedingungen zusammen als **Basis-Axiome** bezeichnet. Mengensysteme mit den Eigenschaften (B1) und (B2) charakterisieren eindeutig ein Matroid. Um dies nachzuweisen benötigen wir noch folgendes

4.5 Proposition: Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ ein Mengensystem mit den Eigenschaften (B1) und (B2). Seien $B, B' \in \mathcal{B}$, dann gilt $|B| = |B'|$.

Beweis. Wir beweisen durch Widerspruch. Angenommen es gäbe mindestens ein Paar $B, B' \in \mathcal{B}$ mit $|B| < |B'|$. Unter allen möglichen Kandidaten wählen wir dasjenige Paar mit minimaler Kardinalität der Differenzmenge $|B' \setminus B| > 0$. Sei nun $\varnothing \neq x \in B' \setminus B$ aus dieser Differenzmenge gewählt, dann folgt aufgrund der Eigenschaft (B2) die Existenz eines $y \in B \setminus B'$ mit $B'' := (B' \setminus \{x\} \cup \{y\}) \in \mathcal{B}$ im Widerspruch zur Minimalität der Differenzmenge $|B' \setminus B|$. Setzt man anstatt B' die Menge B'' ein und bildet die Differenz $|B'' \setminus B|$, dann ist diese Kardinalität kleiner als $|B' \setminus B| > 0$, da $x \in B'$ aber $x \notin B''$ und $y \in B \setminus B'$. ☐

Nun können wir zeigen, dass Mengensysteme $\mathcal{B}$ mit den Eigenschaften (B1) und (B2) ein Matroid erklärt.

4.6 Satz: Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ ein Mengensystem der Grundmenge E mit den Eigenschaften (B1) und (B2). Sei

$$\mathcal{I} := \{I \in \mathcal{P}(E) | \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } I \subseteq B\}.$$

Dann ist $(E,\mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{B}$ die Menge seiner Basen.

Beweis. Das Axiom (M1) der Definition 3.1 folgt aus (B_1). Das zweite Axiom der Definition eines Matroids folgt aus der Definition der Menge $\mathcal{I}$, denn es ist klar, dass alle $B \in \mathcal{B}$ auch in $\mathcal{I}$ liegen und somit alle Teilmengen von B ebenfalls in $\mathcal{I}$ liegen. Es bleibt also nur noch das letzte Axiom (M3) zu beweisen:

Aufgrund der Definition von $\mathcal{I}$ ist klar, dass für zwei Mengen $B, B' \in \mathcal{B}$ mit $B' \subseteq B$ das Axiom (M3) für $I \subseteq B,\ I' \subseteq B'$ mit $|I'| < |I|$ erfüllt ist. Wir setzen deshalb voraus, dass sich die gewählten Basen im Folgenden gegenseitig nicht enthalten.

Wir zeigen durch Widerspruch, d.h. wir nehmen an die Eigenschaft wäre nicht erfüllt und $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ sei ein Gegenbeispiel mit $|I_1| < |I_2|$. Gemäß Definition des Mengensystems $\mathcal{I}$ gibt es je mindestens ein $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $I_1 \subseteq B_1$ bzw. $I_2 \subseteq B_2$. Wir wählen unter den möglichen Kandidaten dasjenige Paar, welches eine minimale Kardinalität $|B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)|$ impliziert.

Da die Mengen I_1, I_2 das Axiom (M3) nicht erfüllen, gilt *für alle* $x \in I_2$, dass $(I_1 \cup \{x\}) \notin \mathcal{I}$ und damit $(I_1 \cup \{x\})$ nicht Teilmenge einer Menge $B \subseteq \mathcal{B}$ ist. Wir zeigen nun, dass aufgrund des eben Gesagten die Gleichung

$$I_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1. \tag{.1}$$

erfüllt ist. Gemäß Wahl ist I_1 Teilmenge von B_1, d.h. die Identität könnte lediglich noch an Elementen aus $(B_1 \cap I_2)$ scheitern, die nicht bereits in I_1 liegen. Ein solches Element $y \in (B_1 \cap I_2)$ würde aber insbesondere in I_2 liegen, womit $(I_1 \cup \{y\}) \notin \mathcal{I} \Rightarrow (I_1 \cup \{y\}) \nsubseteq B_1$ gelten würde. Die Mengen I_1 und B_1 müssen also auf $(B_1 \cap I_2)$ übereinstimmen.

Angenommen die minimal gewählte Menge $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)$ sei nicht leer, d.h. es existiert gemäß Annahme mind. ein x aus dieser Menge. Da $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und aufgrund der Eigenschaft (B2) existiert zu diesem $x \in B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) \subseteq B_2 \setminus B_1$ ein $y \in B_1 \setminus B_2$, so dass $B_2' := (B_2 \setminus \{x\} \cup \{y\}) \in \mathcal{B}$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur minimalen Wahl von $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)$, da $(B_2' \setminus \{x\} \cup \{y\})$ eine kleinere Kardinalität besitzt. Es muss also $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) = \emptyset$ gelten und mit der Regel von De Morgan $(B_2 \setminus I_2) \cap (B_2 \setminus B_1) = \emptyset \Rightarrow B_2 = I_2$, da gemäß Voraussetzung die Mengen B_1 und B_2 nicht gegenseitig enthalten.
Da also $B_2 = I_2$ gilt, folgt zusammen mit (1)

$$B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1. \tag{.2}$$

Wir nehmen nun an, dass $B_1 \setminus (I_1 \cup B_2) \neq \emptyset$ und sei x ein Element aus der nicht leeren Menge $B_1 \setminus (I_1 \cup B_2) \subseteq B_1 \setminus B_2$. Dann gibt es aufgrund der Eigenschaft (B2) ein $y \in B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1$ mit $B_1 \setminus \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$. Dies impliziert jedoch $I_1 \cup \{y\} \in \mathcal{I}$ im Widerspruch zur Annahme, dass I_1 und I_2 ein Gegenbeispiel bilden. Es gilt also $B_1 \setminus (I_1 \cup B_2) = \emptyset \Rightarrow (B_1 \setminus I_1) \cap (B_1 \setminus B_2) = \emptyset \Rightarrow B_1 = I_1$, da gemäß Voraussetzung die

Mengen B_1 und B_2 nicht gegenseitig enthalten.
Da also $B_1 = I_1$ und $B_2 = I_2$ gilt folgt

$$B_1 \setminus B_2 \subseteq I_1 \setminus I_2. \tag{.3}$$

Beachtet man noch, dass die Basen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ aufgrund von Satz 4.2 dieselbe Mächtigkeit besitzen und damit auch $|B_1 \setminus B_2| = |B_2 \setminus B_1|$ gilt. Insgesamt erhalten wir

$$|I_2 \setminus I_1| \overset{(2)}{=} |B_2 \setminus B_1| \overset{4.2}{=} |B_1 \setminus B_2| \overset{(3)}{\leq} |I_1 \setminus I_2|. \tag{.4}$$

Doch (4) impliziert $|I_1| > |I_2|$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $|I_1| < |I_2|$ steht. Die Annahme ist also falsch, d.h. das Axiom (M3) nachgewiesen und damit $(E,\mathcal{I})$ ein Matroid. Offensichtlich ist $\mathcal{B}$ die Menge der Basen dieses Matroids. □

4.7 Folgerung:
Es seien ein Matroid $M := (E,\mathcal{I})$ und ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ gegeben. Dann gilt:
$\mathcal{B}$ ist die Menge aller Basen von $M \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B}$ erfüllt die Bedingungen (B1) und (B2).

Beweis. Der Hinrichtung entspricht Proposition 4.4 und die Rückrichtung folgt gerade mit Hilfe des letzten Satzes 4.6. □

4.8 Beispiel: Wir beziehen uns auf Beispiel 4.3 mit der Grundmenge $E := \{1,2,3,4\}$ und

$$\mathcal{B} := \{\{1,2\};\{1,3\};\{1,4\};\{2,3\};\{2,4\};\{3,4\}\},$$

Die Menge $\mathcal{B}$ ist offensichtlich nicht leer und erfüllt die Bedingung (B2), da sämtliche zweielementige Teilmengen in $\mathcal{B}$ enthalten sind. Setzen wir gemäß Proposition 4.6 die Menge $\mathcal{I} := \{I \subset E |\ \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } I \subseteq B\} = \{I \subseteq B |\ B \in \mathcal{B}\}$ der unabhängigen Menge, dann ist klar, dass $(E,\mathcal{I})$ gerade das Matroid aus 4.3 ergibt.

Dieses Beispiel gibt Anlass zur folgenden

4.9 Definition: Seien $0 \leq m \leq n$ ganze Zahlen. Setzen wir $E := \{1,\dots,n\}$ und $\mathcal{B} := \{I \subseteq E |\ |I| = m\}$ als die Menge aller m-elementigen Teilmengen von E. Die so definierten Mengen erfüllen die Axiome der Basen (B1) und (B2) und die Menge $\mathcal{B}$ induziert somit eine Menge von unabhängigen Teilmengen $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{U}_{m,n} = (E,\mathcal{I})$ ein Matroid ist. Das Matroid $\mathcal{U}_{m,n}$ nennen wir **uniformes Matroid** vom Rang m mit n Elementen. Ist $m = n$ so nennen wir $\mathcal{U}_{m,n}$ **freies Matroid** mit n Elementen.

4.2 Axiome des Zirkuitsystems

Kreise eines Matroids

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, charakterisieren die Basen $B \subseteq E$ eines Matroids $M = (E,\mathcal{I})$ als deren maximal unabhängigen Mengen eindeutig ein Matroid und umgekehrt. Da das System aller abhängigen Mengen gerade komplementär zu den unabhängigen Mengen bezüglich der Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ ist, kann man allein mit Hilfe der Basen alle abhängigen Mengen bestimmen. Wir werden uns in diesem Abschnitt davon überzeugen, dass auch die Umkehrung möglich ist, dazu gehen wir von den minimal abhängigen Elementen von M aus.

4.10 Definition: Eine Menge C heißt **minimal abhängig**, wenn alle *echten* Teilmengen von C unabhängig sind. Es seien ein Matroid $M = (E,\mathcal{I})$ und eine minimal abhängige Teilmenge $C \subseteq E$ gegeben. Wir nennen C einen **Kreis** oder **Zirkuit** des Matroids M. Die **Menge aller Kreise** in M bezeichnen wir mit $\mathcal{C}$ oder mit $\mathcal{C}(M)$, um die Zugehörigkeit des Mengensystems zu betonen. Das Mengensystem $\mathcal{C}$ werden wir auch öfter als **Zirkuitsystem** bezeichnen. Ist C ein Kreis mit $|C| = n$, so nennen wir n auch die **Länge von** C.

In der Graphentheorie ist ein Kreis gemäß Definition 2.8 ein nicht trivialer geschlossener Kantenzug. Wie wir später noch zeigen werden, kann man aus einem Graph $G = (V, K, \delta)$ ein zugehöriges Matroid konstruieren. Dabei ist die Grundmenge $E := K$ die Menge aller Kanten und das zugehorige Mengensystem $\mathcal{I}$ sei die Menge aller Teilmengen von E die keinen Kreis enthalten. Die Kreise des Graphen entsprechen somit den minimal abhängige Mengen des zugehörigen Matroids.

4.11 Beispiel: Es sei die Matrix

$$A := \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

mit $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ mit benannten Spaltenvektoren v_1, v_2, v_3 und v_4 gegeben. Seien $E := \{1, 2, 3, 4\}$ und

$$\mathcal{I} := \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\},$$

dann ist $M := (E,\mathcal{I})$ ein Matroid. Man beachte hierbei, dass ein einzelner Vektor genau dann linear unabhängig ist, wenn er nicht der Nullvektor ist, deshalb ist $\{4\}$ oder eine jede Obermenge davon nicht in $\mathcal{I}$ enthalten. Ferner gilt $v_3 = 2v_1+v_2$, d.h. die drei Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear abhängig und deshalb ist $\{1, 2, 3\} \notin \mathcal{I}$. Minimal abhängige Teilmengen von E sind damit $\{4\}$ und $\{1, 2, 3\}$. Ferner entspricht $\mathcal{B} := \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ der Menge aller Basen von M.

Wie bereits gezeigt wurde, ist es möglich das Mengensystem $\mathcal{C}(M)$ eines Matroids $M = (E,\mathcal{I})$ allein mit Hilfe der Mengenfamilie $\mathcal{B}(M)$ zu bestimmen. Auch die Umkehrung funktioniert, denn es sind genau die Mengen $X \subseteq E$ unabhängig, die keinen Kreis enthalten. Kennen wir die Menge aller Basen $\mathcal{B}(M)$, so ist es weiter möglich alle unabhängigen Mengen also $\mathcal{I}(M)$ zu bestimmen: Bilden wir das Mengensystem aller Teilmengen einer jeden Basis $B \in \mathcal{B}(M)$, so enthält dieses System gerade alle unabhängigen Mengen. Analog dazu können wir auch alle abhängigen Mengen mit Hilfe von $\mathcal{C}(M)$ bestimmen, denn das sind alle Obermengen der minimal abhängigen Mengen aus $\mathcal{P}(E)$

zusammengenommen.

Es ist recht nützlich zur Definition eines Kreises weitere äquivalente Formulierungen zur Hand zu haben. Folgendes Proposition formuliert derartige äquivalente Bedingungen; die Beweisführung ist einfach, wird aber dennoch nicht augelassen.

4.12 Proposition: Es sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$. Dann sind äquivalent:

1. C ist ein Kreis.
2. $C \notin \mathcal{I}$ und $\forall x \in C$ gilt $C \setminus \{x\} \in \mathcal{I}$.
3. Es gibt ein $C' \in \mathcal{C}$, so dass $C' \subseteq C$ und $C' \notsubset C$ gilt.
4. $C \in \mathcal{C}$.

Beweis. „1. ⇒ 2.“: Gemäß Definition ist C eine minimal abhängige Teilmenge $C \subseteq E$, d.h. alle echten Teilmengen von C sind abhängig. Damit ist bereits alles gezeigt.

„2. ⇒ 3.“: Gemäß Voraussetzung ist C eine nicht unabhängige Teilmenge, die sobald man diese um ein Element reduziert abhängig wird. Es ist klar, dass stets $C' := C$ die Bedingung aus 3. erfüllt, da die Mengen aller unabhängigen und abhängigen Teilmengen komplementär bezüglich der Potenzmenge sind. Gemäß Voraussetzung sind alle echten Teilmengen von C abhängig und können somit keine echte nicht unabhängige Teilmenge $C' \subsetneq C$ sein.

„3. ⇒ 4.“: Es erfülle eine Teilmenge $C \subseteq E$ die Voraussetzung von 3. Gemäß Voraussetzungen gibt es zu diesem C eine Teilmenge $C' \in \mathcal{C}$ für die $C' \subseteq C$ und $C' \not\subset C$ gilt. Die Menge C' ist also Teilmenge aber keine echte Teilmenge, womit $C' = C \in \mathcal{C}$ folgt.

„4. ⇒ 1.“: Gemäß Definition. □

Die folgenden Axiome (C1), (C2) und (C3) werden auch **Kreis-Axiome** eines Matroids genannt, denn erfüllt ein Mengensystem diese Axiome, so ist dadurch bereits eindeutig ein Matroid bestimmt. Doch zunächst beweisen wir, dass die Menge aller Kreise $\mathcal{C}$ eines Matroids, die geforderten Axiome erfüllt.

4.13 Proposition: Sei $\mathcal{C}$ das Mengensystem aller Kreise eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$. Dann gilt

(C1) $\varnothing \notin \mathcal{C}$.

(C2) Seien $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ und $C_1 \subseteq C_2$ dann folgt $C_1 = C_2$.

(C3) Für alle $C_1 \neq C_2 \in \mathcal{C}$ und alle $x \in C_1 \cap C_2$ existiert mind. ein Kreis C_3 aus $\mathcal{C}$, so dass $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ gilt.

Beweis. Ad (C1): Da $\varnothing$ stets eine unabhängige Menge ist, kann diese nicht abhängig und schon gar nicht minimal abhängig sein.

Ad (C2): Angenommen beide Kreise wären nicht identisch, d.h. es würde $C_1 \neq C_2$ gelten. Da nach Voraussetzungen $C_1 \subseteq C_2$ erfüllt ist, muss $|C_1| < |C_2|$ gelten, was im Widerspruch zur Minimalität von C_2 bzw. dessen Definition steht. Es muss also $C_1 = C_2$ gelten.

Ad (C3): Wir beweisen durch Widerspruch und nehmen dazu an, dass $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ unabhängig wäre. Gemäß Voraussetzung sind die Kreise C_1 und C_2 verschieden, wir können also ein $y \in (C_2 \setminus C_1) \neq \varnothing$ wählen. Da C_2 ein Kreis ist gilt $I := (C_2 \setminus \{y\}) \in \mathcal{I}$. Sei nun eine unabhängige Teilmenge I_m von E mit $I_m \subseteq (C_1 \cup C_2)$ so gewählt, dass $y \notin I_m$ gilt: die Existenz ist gesichert, da wir notfalls $I_m := I$ setzen können. Das C_1 eine abhängige Menge ist, kann diese nicht vollständig in der unabhängigen Menge I_m enthalten sein. Somit gilt $|I_m| < |(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}|$, wobei $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ gemäß Voraussetzung unabhängig ist. Dies steht im direkten Widerspruch entweder zur maximalen Wahl von I_m oder zum Basisergänzungsaxiom (M3). □

Die Bedingung (C3) wird auch **schwaches Kreiseliminationsaxiom** genannt und kann wie folgt in Prosa formuliert werden: Zu je zwei verschiedenen Kreisen und einem Element aus dem Schnitt dieser beiden Kreise, gibt es einen dritten Kreis der in den beiden Kreisen enthalten ist und dabei das gewählte Element aus dem Schnitt vermeidet. Die Bezeichnung „schwach" legt nahe, dass es auch ein **starkes Kreiseleminationsaxiom** gibt, welches sich aus den Kreis-Axiomen (C1), (C2) und (C3) folgern lässt:

(C3') Für alle $C_1 \neq C_2 \in \mathcal{C}$ und alle $x \in C_1 \cap C_2$ und $y \in C_2 \setminus C_1$ existiert mind. ein Kreis D aus $\mathcal{C}$, so dass $y \in D \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ gilt.

Zu zwei verschiedenen Kreisen und einem Element aus dem Schnitt, kann also nicht nur ein dritter Kreis in der Vereinigungsmenge gefunden werden, der das aus dem Schnitt gewählte Element vermeidet, es kann sogar noch ein beliebiges weiteres Element aus der Differenz beider Kreise vorgegeben werden, dass dann in dem dritten Kreis enthalten ist.

Man beachte im nächsten Beweis, dass sich aus (C1) folgern lässt, dass ein jeder Kreis (falls einer existiert) nicht leer ist, da die leere Menge unabhängig ist.

Beweis (C3'). Wir beweisen durch Widerspruch und nehmen deshalb an, dass gewisse Kreise $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ und Elemente $x \in (C_1 \cap C_2)$ bzw. $y \in C_2 \setminus C_1$ die Bedingung (C3') nicht erfüllen. Unter diesen wählen wir die Kreise C_1, C_2 derart, dass $k := |C_1 \cup C_2|$ minimal ist. Aufgrund der Bedingung (C3) existiert ein $D \in \mathcal{C}$ mit $D \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$, allerdings folgt aufgrund der Annahme, dass $y \notin D$ gilt. Da aber $y \in C_2 \setminus C_1$ gilt, folgt mit (C2), dass $D \nsubseteq C_2$ ist, d.h. es gibt mind. ein $z \in D \cap (C_1 \setminus C_2)$.

Nun betrachten wir die Punkte x mit $x \notin D$ und $y \in C_2 \setminus C_1$ mit $y \notin D$ sowie $z \in D \cap (C_1 \setminus C_2) \subset (C_1 \cap D)$ und die dazu gehörigen Mengen C_1, C_2, D. Alle beteiligten Mengen sind aufgrund von Axiom (C1) nicht leer und $y \notin (C_1 \cup D)$, damit folgt $|C_1 \cup D| < |C_1 \cup C_2| = k$. Mit (C3) folgt die Existenz eines Kreises $D' \in \mathcal{C}$ mit $x \in D' \subseteq (C_1 \cup D) \setminus \{z\}$. Nun betrachten wir die Kreise C_2 und D' sowie die Elemente $x \in (C_2 \cap D')$ und $y \notin (C_2 \setminus D')$.

Wegen $z \notin (C_2 \cup D')$ und (C1) ist $|C_2 \cup D'| < |C_1 \cup C_2| = k$, also gibt es, aufgrund der minimalen Wahl von C_1 und C_2, ein $D'' \in \mathcal{C}$ mit $y \in D'' \subseteq (C \cup D') \setminus \{x\} \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$, was im Widerspruch zur Annahme steht. □

Gelten die Kreisaxiome für eine Mengenfamilie einer endlichen Menge E, so ist dadurch bereits ein Matroid erklärt.

4.14 Satz: Seien E eine endliche Menge und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ eine Familie von Teilmengen von E, die (C1), (C2) und (C3) erfüllt. Weiter sei

$$\mathcal{I} := \{I \subseteq E | \nexists C \in \mathcal{C} \text{ mit } C \subseteq I\},$$

dann ist $M := (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ die Menge seiner Kreise.

Beweis. Um zu zeigen, dass M tatsächlich ein Matroid ist, müssen wir die Axiome der Definition 3.1 nachweisen.

Ad (M1): Die leere Menge $\varnothing$ kann niemals als Teilmenge einen Kreis enthalten. Ein Kreis ist stets endlich und nicht leer.

Ad (M2): Enthält eine Teilmenge $I \subseteq E$ keinen Kreis als Teilmenge, dann gilt dasselbe erst recht für die Teilmengen von I.

Ad (M3): Seien $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$. Wir müssen zeigen, dass wir dann die unabhängige Menge I_2 zu einer unabhängigen Menge $(I_1 \cup \{x\})$ mit einem Element aus $x \in (I_2 \setminus I_1)$ erweitern können. Da I_2 unabhängig ist und echt mehr Elemente als I_1 enthält, gibt es gewisse $I \subseteq (I_1 \cup I_2)$ mit $I \in \mathcal{I}$ und $|I_1| < |I|$, so dass $k = |I_1 \setminus I|$ minimal wird. Wir wollen also, dass I möglichst viele Elemente aus I_1 enthält. Ist $k = 0$, so muss I eine echte Obermenge von I_1, da $|I_1| < |I|$ gilt. Damit hätten wir bereits eine entsprechende Erweiterung gefunden.

Wir dürfen also annehmen, dass es mind. ein Element $x \in (I_1 \setminus I)$ gibt und damit $k > 0$ ist. Seien weiter $y_1, y_2 \in I \setminus I_1$ mit $y_1 \neq y_2$. Die Mengen

$$X_{y_i} := (I \setminus y_i) \cup x \qquad \text{für } i = 1, 2,$$

sind Teilmengen von $(I_1 \cup I_2)$ und erfüllen gemäß Definition die Ungleichung $|I_1| < |X_{y_i}|$. Ferner gilt $|I_1 \setminus X_{y_i}| < |I_1 \setminus I| = k$ und nach Wahl von I ist k minimal gewählt, so dass I noch unabhängig ist. Damit muss also X_{y_i} abhängig sein und einen Kreis $C_{y_i} \subseteq X_{y_i}$ (minimal abhängige Menge) enthalten. Die Teilmengen $(X_{y_i} \setminus \{x\}) \subseteq I$ sind selbst unabhängig gemäß (M2) und deshalb müssen die Kreise C_{y_1} sowie C_{y_2} beide x enthalten, d.h. $x \in (C_{y_1} \cap C_{y_2})$. Damit sind die Voraussetzungen für (C3) erfüllt, wonach es ein $C_3 \in \mathcal{C}$ gibt mit $C_3 \subseteq ((C_{y_1} \cup C_{y_2}) \setminus \{x\}) \subseteq I \in \mathcal{I}$. Dies ist ein Widerspruch zur minimalen Wahl von I, da $y_i \notin C_{y_i}$ und $y_i \in I$ gilt. Die Annahme, dass (M3) nicht gelten würde war also falsch, womit wir nur noch zeigen müssen, dass $\mathcal{C}$ die Menge der Kreise des Matroids ist. Dies folgt aber direkt mit Hilfe der Proposition 4.12. □

4.15 Folgerung: Seien ein Matroid $M := (E,\mathcal{I})$ und ein Mengensystem $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ gegeben. Dann gilt:

$$\mathcal{C} \text{ ist die Menge aller Kreise von } M \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C} \text{ erfüllt (C1), (C2) und (C3).}$$

Beweis. Die Hinrichtung folgt mit Proposition 4.13 und die Rückrichtung mit Satz 4.14. □

Fundamentalkreise eines Matroids

Es sei B eine Basis des Matroids $M = (E,\mathcal{I})$ und $x \in E \setminus B$, so ist $D := (B \cup \{x\})$ abhängig, da eine Basis gerade eine maximale unabhängige Menge ist. Die Menge D *enthält* als abhängige Menge eine minimal abhängige Menge, also einen Kreis zur Basis B und dem Element x. Diesen Kreis nennen wir **Fundamentalkreis** zur Basis B und dem Element x.

Ein solcher Fundamentalkreis zur Basis B und dem Element x enthält gemäß Definition stets das Element $x \in E \setminus B$ und ist sogar eindeutig bestimmt.

4.16 Proposition: Seien $M = (E,\mathcal{I})$ ein Matroid und $B \in \mathcal{I}$ eine Basis, d.h. eine maximal unabhängige Teilmenge von E. Dann gibt es genau einen Fundamentalkreis $C(B,x) \subseteq (B \cup \{x\})$ und es gilt $x \in C(B,x)$.

Beweis. Die Existenz ist unmittelbar klar, es bleibt also nur noch die Eindeutigkeit nachzuweisen. Dazu nehmen wir an, dass es zwei *verschiedene* Kreise $C, C' \subseteq ((B \cup \{x\}))$ zur Basis B und dem Element x gibt. Da beide Kreise gemäß Definition das Element x enthalten, folgt mit dem dritten Kreisaxiom (C3), dass $((C \cup C') \setminus \{x\}) \subseteq B$ ebenfalls einen Kreis enthält. Dies steht jedoch im Widerspruch mit (M2), da alle Teilmengen einer Basis unabhängig sind. □

4.17 Beispiel: Wir beziehen uns auf das Matroid $M = (E,\mathcal{I})$ aus dem Beispiel 4.11 gebildet aus der Matrix

$$A := \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Die Grundmenge $E := \{1,2,3,4\}$ besteht aus der Indexmenge und

$$\mathcal{I} := \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\},$$

aus den Teilmengen I von E derart, dass die Spaltenvektoren $\{v_i | \, i \in I\}$ unabhängig sind. Die Menge aller Basen $\mathcal{B}$ besteht aus den drei Basen $\{1,2\}, \{1,3\}$ und $\{2,3\}$. Ergänzen wir $\{1,2\}$ um $\{3\}$, so ergibt sich als minimal abhängige Menge $\{1,2,3\}$. Vereinigen wir dagegen $\{1,2\}$ und $\{4\}$, so sehen wir, dass eine echte Teilmenge, nämlich $\{4\}$ eine minimal abhängige Teilmenge bildet. Es sind also $C(\{1,2\},\{3\}) = \{1,2,3\}$ und $C(\{1,2\},\{4\}) = \{4\}$ die beiden Fundamentalkreise. Analoges stellt man auch für die übrigen Basen fest.

Wie letztes Beispiel nahe legt, kann man jede minimal abhänigige Menge C, d.h. jeden Kreis eines Matroids, als Fundamentalkreis interpretieren. Ist x ein Element aus dem Kreis C, dann gibt es eine Basis B mit $B \supseteq (C \setminus \{x\})$. Die Menge C ist dann Fundamentalkreis zur Basis B und dem Element x. Man sagt auch, dass $C \setminus \{x\}$ zu einer Basis B ergänzt werden kann. Es sind also Kreise Fundamentalkreise sind Kreise. Aus diesem Grund werden wir künftig minimal unabhängige Mengen auch nur als Kreise bezeichnen.

4.18 Beispiel: Es seien ein K-Vektorraum $V =: E$ der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{I} := \{X \subseteq V | \; X \text{ist linear unabhängig}\}$. Dann bildet $M := (E, \mathcal{I})$ gemäß Bemerkung 3.2 ein Matroid. Wir wissen aus der linearen Algebra, dass ein jeder Vektor $x \in V$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \quad \text{mit } \lambda_i \in K$$

besitzt. Dabei sind die $b_i \in V$ natürlich die Basisvektoren einer Basis B. Die nicht verschwindenden $b_i \in B$ und $x \in V \setminus B$ bilden zusammen einen Fundamentalkreis $C(B, x)$ zur Basis B und dem Element x.

Mit Hilfe der Eindeutigkeit eines Fundamentalkreises könnten wir auch die Bedingung (C3) der Proposition 4.13 alternativ beweisen. Sind C_1, C_2 zwei verschiedene Kreise und x aus deren Schnitt, dann muss auch $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ einen Kreis enthalten. Angenommen dem wäre nicht so, dann wäre $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ unabhängig, d.h. wir könnten $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ zu einer Basis B ergänzen und hätten somit dann zwei verschiedene Fundamentalkreise zu B und x konstruiert.

Kreismatroide aus Graphen

Matroide können auch und insbesondere mit Hilfe eines (ungerichteten endlichen) Graphen G konstruiert werden. Die Grundmenge E, eines aus einem Graphen gewonnenen Matroids, entspricht der Menge aller Kanten K des Graphen G. Alle Teilmengen von K, die keinen Kreis (im Sinne der Definition 2.8) enthalten, bilden das Mengensystem $\mathcal{I}$ des Matroids.

4.19 Definition: Sei $G = (V, K, \delta)$ ein ungerichteter endlicher Graph und

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}[G] := \{K' \subseteq K | \; K' \text{ enthält keinen Kantenkreis } \}.$$

Dann nennen wir $M[G] := (E := K, \mathcal{I})$ **Kreismatroid** oder **Polygonmatroid**.

Natürlich ist ein Kreismatroid ein Matroid gemäß Definition 3.1. Wir werden den natürlichen Beweis mit Hilfe der Kreisaxiome führen und zusätzlich die Definition direkt nachweisen.

Bemerkung: Das Kreismatroid $M[G]$ eines Graphen $G = (V, K, \delta)$ ist ein Matroid.

Beweis. Es sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise des Matroids $M[G]$.

Ad (C1): Es ist klar, dass die leere Menge an Kanten offensichtlich kreisfei ist, d.h. $\varnothing \notin \mathcal{C}$.

Ad (C2): Der Kreis eines Graphen enthält natürlich keine zu diesem differenten Kreise, es gilt also (C2).

Ad (C3): Seien $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ zwei unterschiedliche Kreise des Graphen G mit gemeinsamer Kante e. Seien u und v die mit e inzidierten Knoten der Kante. Wir konstruieren daraus einen Kreis in G, dessen Kantenmenge in $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ enthalten ist. Für $i = 1, 2$ sei P_i der Pfad von u nach v in G, dessen Kantenmenge gerade $C_i \setminus \{e\}$ entspricht. Beide Pfade können sich partiell dieselben Kanten beinhalten. Wir laufen nun gedanklich den Pfad P_1 von u in Richtung v ab. Sei w der erste Knoten des Weges P_1, dessen Nachfolgerknoten bzw. dessen inzidierten Kanten nicht mehr in P_2 enthalten sind. Wir folgen sodann dem Pfad P_1 weiter von w aus Richtung v bis wir auf einen Knoten $x \neq w$ stoßen, der wieder in P_2 enthalten ist. Da beide Wege P_1 und P_2 beide im Punkt v enden, muss es einen solchen Knoten geben. Vereinigen wir nun die disjunkten Pfade von x nac w der Wege P_1 und P_2, so erhalten wir einen Kreis von x nach w, der in der Menge $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ enthalten ist. □

Altern. Beweis. Die leere Menge an Kanten ist offensichtlich kreisfrei und damit ist (M1) erfüllt. Seien nun eine kreisfreie Menge an Kanten $K_2 \in \mathcal{I}$ und eine Teilmenge $K_1 \subseteq K_2$ gegeben. Natürlich ist dann auch die Teilmenge K_1 kreisfrei, d.h. es gilt (M2). Es seien nun schließlich zwei kreisfreie Mengen $K_1, K_2 \in \mathcal{I}$ gegeben, wobei $|K_1| < |K_2|$ gilt. Ist $K_1 \subseteq K_2$, dann ist klar, dass es eine Kante $\widetilde{k} \in K_2$ gibt, so dass $K_1 \cup \widetilde{k}$ kreisfrei ist. Wir können also annehmen, dass $K_1 \nsubseteq K_2$ gilt, d.h. die Differenzmenge $K_2 \setminus K_1$ ist nicht leer. K_1 kann keine maximal kreisfreie Menge (=Basis) sein, da $|K_1| < |K_2|$ und Basen stets dieselbe Mächtigkeit besitzen. Wählt man nun also ein $\widetilde{k} \in K_2 \setminus K_1$, dann kann diese Kante lediglich mit maximal einem Knoten der Kanten aus K_1 inzidieren. Angenommen dem wäre nicht so, dann wäre K_1 bereits eine maximal kreislose Menge - Widerspruch. Da $\widetilde{k}$ mit nur einem Knoten aus K_1 indiziert, kann $K_1 \cup \{\widetilde{k}\}$ keinen Kreis (geschlossener Kantenzug) enthalten. Folglich gilt (M3). □

Neben den Vektormatroiden ist dies eine weitere äußerst bedeutende Klasse von Matroiden. Die minimal abhängigen Mengen eines Kreismatroids entsprechen gerade den Kreisen des zugehörigen Graphen, dadurch wurde ganz offensichtlich die Namensgebung minimal abhängiger Mengen allgemeiner Matroide (vgl. Definition 4.10) motiviert.

Ein Beispiel wird die Bemerkung veranschaulichen.

4.20 Beispiel: Es sei der Graph $G = (V, K, \delta)$ aus Abb. .3 gegeben, wobei $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ und $K = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Setzen wir gemäß der letzten Bemerkung $E := K$ und

$$\mathcal{I} := \mathcal{P}(E) \setminus \{\{e_2, e_3, e_4, e_5\}; \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}\}$$

dann ist $M(G) := (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Man beachte, dass es genau einen Kreis in obigem Graphen gibt, nämlich die Kantenfolge $(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_2)$, deshalb ist die Kantenmenge $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$ und jede Obermenge, d.h. einzig zusätzlich noch

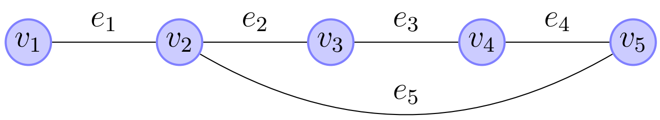


Abb. .3: *Graph G*

$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, abhängig. Gemäß Proposition 2.11 entspricht ein maximal kreisloser Graph und damit eine maximal unabhängige Katenmenge gerade einen G aufspannenden Baum. Die Kantenmenge eines aufspannenden Baums des Graphen G ist also eine Basis des induzierten Matroids. So sind z.B. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ oder $\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ Basen von $M[G]$.

Ein Matroid heißt **graphisch**, wenn er isomorph zu einem Kreismatroid ist. Die Klasse der graphischen Matroide ist verhältnismäßig „klein", bezogen auf die Gesamtmenge aller Matroide. So sind z.B. die uniformen Matroide $\mathcal{U}_{3,6}$ oder $\mathcal{U}_{2,4}$ nicht graphisch. Sie können gerne versuchen diese als Graph darzustellen, es wird Ihnen nicht gelingen. Ein Beweis dieser Behauptung benutzt das Konzept der **verbotenen Minoren**, wobei ein Minor so etwas wie ein Teilmatroid ist. Ein graphisches Matroid enthält u.a. niemals $\mathcal{U}_{2,4}$ als Minor.

4.3 Axiome der Rangfunktion

In diesem Abschnitt werden wir ein weiteres äquivalentes Axiomensystem für Matroide, mit Hilfe so genannter Rangfunktionen, entwickeln. Eng mit der Rangfunktion eines Matroids verknüpft ist eine Mengenfunktion *cl* die wir Abschlussoperator nennen werden. Einen speziellen Abschlussoperator kennen Sie wahrscheinlich bereits aus der linearen Algebra. Dort nennt man diesen Operator „lineare Hülle" oder auch das „Erzeugnis einer Menge von Vektoren".

Rangfunktion eines Matroids

Um die Rangfunktion eines Matroid erklären zu können, benötigen wir noch die folgende

4.21 Definition: Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $F \subseteq E$. Das Matroid $M_{|F} := (F, \mathcal{I}(M_{|F}))$ mit

$$\mathcal{I}(M_{|F}) = \mathcal{I}_{|F} := \{I \subseteq F |\ I \in \mathcal{I}\}$$

nennen wir die **Restriktion von** M **auf** F und sagen auch $M_{|F}$ entsteht durch **Löschen von** $T = E \setminus F$ oder durch **Reduktion von** T und wird in diesem Fall durch $M \setminus T$ notiert.

Aufgrund der Definition und der Erblichkeit erfüllt $M_{|F}$ die Axiome eines Matroids, d.h. wir haben also aus M ein weiteres Matroid $M_{|F}$ konstruiert. Diese Konstruktion werden wir im weiter unten liegenden Abschnitt über die Restriktion bzw. Reduktion von Matroiden genauer untersuchen. Alle Basen eines Matroids besitzen, gemäß Satz 4.2, dieselbe Anzahl an Elementen, deshalb macht folgende Definition Sinn.

4.22 Definition: Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $F \subseteq E$, dann nennen wir $r : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$F \mapsto r(F) := |B_F| \qquad \text{für ein } B_F \in \mathcal{B}(M_{|F})$$

die **Rangfunktion** von M und $r(F)$ den **Rang von** $M_{|F}$.

Der Rang eines Matroids M bzw. von E ist die Mächtigkeit einer (und damit jeder) Basis B von M und soll so etwas, wie die „Dimension“ eines Matroids, erklären. Der Rang einer Teilmenge $F \subseteq E$ eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$ entspricht der Mächtigkeit einer (und damit aller) maximal unabhängigen Elemente der Restriktion von M auf F. Man beachte, dass eine Restriktion $M_{|F}$ stets durch Löschen der Teilmenge $T = (E \setminus F)$ aus der Grundmenge E entsteht.

4.23 Beispiel: Wir betrachten das uniforme Matroid $\mathcal{U}_{2,4} = (E, \mathcal{I})$ mit $E := \{1,2,3,4\}$ und

$$\mathcal{I} := \{\ \emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\}\ \}.$$

In Beispiel 4.3 haben wir gesehen, dass alle sechs zweielementigen Mengen Basen des Matroids sind. Sei nun $Y := \{1,2,3\}$, dann ist der Rang von Y definiert durch

$$r(\{1,2,3\}) = |B_{\{1,2,3\}}| \qquad \text{für ein } B_{\{1,2,3\}} \in \mathcal{B}(M_{|\{1,2,3\}}).$$

Um den Rang $r(\{1,2,3\}) \in \mathbb{N}_0$ zu bestimmen müssen wir also die Mächtigkeit eines maximalen Elements der Restriktion von M auf $\{1,2,3\}$ bestimmen. An Hand der Definition können wir die Mengensystem aller unabhängigen Mengen

$$\mathcal{I}(M_{|\{1,2,3\}}) := \{I \subseteq \{1,2,3\} |\ I \in \mathcal{I}\} = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{2,3\}\}$$

ablesen. Die maximalen Elemente aus $\mathcal{I}(M_{|\{1,2,3\}})$ besitzen offensichtlich die Mächtigkeit 2, es gilt also $r(\{1,2,3\}) = 2$.

Betrachten wir nun $X := \{1,3\}$ und berechnen den Rang $r(\{1,3\})$. Die Restriktion von M auf $\{1,3\}$ bewirkt, dass $\{1,3\}$ als maximal unabhängige Menge in $\mathcal{I}_{|\{1,3\}}$ enthalten ist:

$$\mathcal{I}(M_{|\{1,3\}}) := \{I \subseteq \{1,3\} |\ I \in \mathcal{I}\} = \{\emptyset; \{1\}; \{3\}; \{1,3\}\}.$$

Es gilt also $r(\{1,3\}) = 2$. Die Restriktion von M auf eine einelementige Menge $\{x\}$ mit $x \in \{1,2,3\}$ bewirkt offenbar, dass $\mathcal{I}_{|\{x\}}$ nur noch aus diesem Element x und der leeren Menge besteht, d.h. in diesem Fall ist $\{x\}$ gerade auch die einzige Basis von $M_{|\{x\}}$ und somit $r(\{x\}) = 1$.

Die in der nächsten Proposition aufgelisteten grundlegenden Eigenschaften einer Rangfunktion charakterisieren –wie die Kreis- und die Basisaxiome– Matroide.

4.24 Proposition: Es seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $r : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$ dessen Rangfunktion, dann gilt:

(R1) $\forall X \subseteq E$ gilt: $\quad 0 \leq r(X) \leq |X|$,

(R2) $\forall X, Y \subseteq E$ mit $X \subseteq Y$ gilt: $\quad r(X) \leq r(Y)$,

(R3) $\forall X, Y \subseteq E$ gilt: $\quad r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

Die Rangfunktion r ist *nicht negativ* und *subkardinal* (R1), sie ist *monoton* (R2) und *submodular* (R3).

Hinweis: Die Eigenschaft (R3) erinnert Sie vielleicht an die Dimensionsformel für die Summe von Untervektorräumen U und U' eines Vektorraumes V:

$$dim(U + U') + dim(U \cup U') = dim(U) + dim(U').$$

Beweis der Proposition. Ad (R1): Gemäß Definition kann der Rang einer Teilmenge $X \subseteq E$ nur positiv oder gleich Null sein und damit ist die Rangfunktion nicht negativ. Ferner ist die Mächtigkeit einer Basis B von X natürlich maximal $|X|$ und damit subkardinal.

Ad (R2): Die Monotonie der Rangfunktion ist ebenso wie (R1) eine direkte Folgerung der Definition und der Eigenschaften von Basen. Sind Basen B_X bzw. B_Y von X bzw. Y gegeben, dann sind diese gemäß Definition maximal unabhängige Mengen. Gilt nun $X \subseteq Y$, dann ist klar, dass dann auch $r(X) \leq r(Y)$ gilt.

Ad (R3): Es sei $B_{X \cap Y}$ eine Basis von $(X \cap Y)$. Die Basis $B_{X \cap Y}$ ist in der Menge $\mathcal{I}(M_{X \cup Y})$ enthalten, da $(X \cap Y) \subseteq (X \cup Y)$ gilt und Teilmengen von unabhängigen Teilmengen wieder unabhängig sind. Durch wiederholte Anwendung von (M3) können wir $B_{X \cap Y}$ zu einer Basis $B_{X \cup Y}$ von $(X \cup Y)$ ergänzen und erhalten dadurch

$$\begin{aligned}
r(X) + r(Y) &\overset{(R1)}{\geq} |B_{X \cup Y} \cap X| + |B_{X \cup Y} \cap Y| \\
&= |(B_{X \cup Y} \cap X) \cup (B_{X \cup Y} \cap Y)| + |(B_{X \cup Y} \cap X) \cup (B_{X \cup Y} \cap Y)| \\
&= |(B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y)| + |(B_{X \cup Y} \cap (X \cap Y)| \\
&= |B_{X \cup Y}| + |B_{X \cap Y}|.
\end{aligned}$$

Die letzten Umformungsschritte ergeben sich aus den Gesetzen der Mengenlehre und da $|B_{X \cup Y}| = r(X \cup Y)$ und $|B_{X \cap Y}| = r(X \cap Y)$ gilt, folgt die Behauptung. □

Abschlussoperator und die Rangfunktion

Es wird sich als nützlich erweisen, diejenigen Elemente $e \in E$ auszuzeichnen, welche den Rang einer gegebenen Teilmenge $X \subseteq E$ nach Hinzufügen eines der Elemente, nicht verändern. Ist z.B. eine Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$ von Vektoren eines Vektorraums V gegeben, dann wirken sich sämtliche Vektoren des Untervektorraums $U := \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ invariant gegenüber der Dimension $dim(U)$ aus; die Dimension wird durch diese Vektoren also nicht vergrößert.

4.25 Definition: Sei E eine Menge und $cl : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ eine Mengenfunktion. Die Mengenfunktion cl nennen wir **Abschlussoperator** oder **Hüllenoperator**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(A1) $\forall X \subseteq E$ gilt: $X \subseteq cl(X)$.

(A2) $\forall X, Y \subseteq E$ mit $X \subseteq Y$ gilt: $cl(X) \subseteq cl(Y)$.

(A3) $\forall X \subseteq E$ gilt: $cl(cl(X)) = cl(X)$.

Ein Hüllenoperator cl ist also *extensiv* (A1), *isoton* (A2) und *idempotent* (A3). Das Bild der Mengenfunktion cl ist eine Teilmenge von E, d.h. $cl(X) \in \mathcal{P}(E)$. Die nächste Proposition zeigt, dass man mit Hilfe der Rangfunktion in natürlicher Weise einen Hüllenoperator definieren kann.

4.26 Proposition: Sei $r : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$ eine subkardianle, monotone und submodulare Funktion, also z.B. eine Rangfunktion. Definieren wir die Mengenfunktion $cl : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ durch

$$X \mapsto cl(X) := \{e \in E |\ r(X \cup \{e\}) = r(X)\},$$

dann ist cl ein Hüllenoperator und es gilt

$$r(cl(X)) = r(X). \tag{RCL}$$

Beweis. Wir müssen beweisen, dass die in der Proposition definierte Funktion r ein Hüllenoperator ist, dazu weisen wir die drei Bedingungen der Definition nach.

Ad (A1): Sei $X \subseteq E$ eine Teilmenge und e ein beliebiges Element aus X. Es ist klar, dass $r(X \cup \{e\}) = r(X)$ gilt und damit $e \in cl(X)$.

Wir beweisen nun zunächst die Behauptung (RCL) mit Induktion nach $n := cl(X) \setminus X$. Da für $n = 0$ die Behauptung aus (A1) folgt ist der Induktionsanfang erfüllt. Weiter gelte nun die Induktionsvoraussetzung (IV) für beliebiges aber fixiertes $n \in \mathbb{N}$ und es sei $cl(X) \setminus X = \{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$. Es gilt also $r(X \cup \{y_1, \ldots, y_n\}) = r(X)$ und natürlich auch $r(X \cup \{y_i\}) = r(X)$ für $i = 1, \ldots, n+1$.

Man beachte bei der nun folgenden Anwendung von (R3), dass $(X \cup \{y_1, \ldots, y_n\}) \cap (X \cup \{y_{n+1}\}) = X$ und $(X \cup \{y_1, \ldots, y_n\}) \cup (X \cup \{y_{n+1}\}) = (X \cup \{y_1, \ldots, y_{n+1}\})$ gilt.

$$\begin{aligned} r(X) + r(X) &\overset{\text{IV}}{=} r(X \cup \{y_1, \ldots, y_n\}) + r(X \cup \{y_{n+1}\}) \\ &\overset{\text{(R3)}}{\geq} r(X \cup \{y_1, \ldots, y_{n+1}\}) + r(X). \end{aligned}$$

Durch Subtraktion von $r(X)$ folgt aus der Ungleichung $r(X) \geq r(X \cup \{y_1, \ldots, y_{n+1}\})$ und damit $r(X) \geq cl(X)$. Nach (A1) gilt stets $X \subseteq cl(X)$ und mit (R2) folgt damit $r(cl(X)) \geq r(X)$. Zusammen ergibt sich damit die Identität $r(X) = r(cl(X))$.

Ad (A2): Seien X, Y Teilmengen von E mit $X \subseteq Y$. Wir müssen nachweisen, dass gilt:

$$cl(X) \subseteq cl(Y) \iff \{e \in E |\ r(X \cup \{e\}) = r(X)\} \subseteq \{e' \in E |\ r(Y \cup \{e'\}) = r(Y)\}.$$

Sei dazu ein beliebiges $e \in cl(X)$ gewählt, d.h. die Gleichung $r(X \cup \{e\}) = r(X)$ ist erfüllt. Falls $e \in Y$ so ist $(Y \cup \{e\}) = Y$ und damit $r(Y \cup \{e\}) = r(Y)$, d.h. $e \in cl(Y)$. Wir können also $e \notin Y$ annehmen, dann gilt $(X \cup \{e\}) \cap Y = X$ und es folgt:

$$\begin{aligned} r(Y \cup \{e\}) &= r((X \cup \{e\}) \cup Y) \\ &\overset{(R3)}{\leq} r(X \cup \{e\}) + r(Y) - r((X \cup \{e\}) \cap Y) \\ &\overset{\text{Vor.}}{=} r(X) + r(Y) - r(X) \\ &= r(Y). \end{aligned}$$

Andererseits gilt $Y \subseteq (Y \cup \{e\})$ und damit $r(Y) \leq r(Y \cup \{e\})$, also insgesamt $r(Y \cup \{e\}) = r(Y)$ was gleichbedeutend ist mit $e \in cl(Y)$.

Ad (A3): Wir müssen zeigen, dass $cl(cl(X)) = cl(X)$ gilt. Dazu setzen wir zunächst $X' := cl(X) \subseteq E$ und nehmen an, dass die Differenz $cl(X') \setminus X'$ nicht leer ist. Mit der bereits bewiesenen Aussage (RCL) folgt $r(X) = r(cl(X)) = r(X')$. Da y gerade aus dem Abschluss $cl(X') \setminus X'$ gewählt wurde, gilt $r(X') = r(X' \cup \{y\})$ und somit $r(X) = r(X') = r(X' \cup \{y\})$ womit aber $y \in cl(X')$ folgen würde $\lightning$. Dieser Widerspruch impliziert $cl(X') \setminus X' = \emptyset$ womit die (A3) folgt. □

4.27 Beispiel: Wir betrachten das uniforme Matroid $\mathcal{U}_{2,4} = (E, \mathcal{I})$ mit $E := \{1,2,3,4\}$ und

$$\mathcal{I} := \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\}\}.$$

In Beispiel 4.23 haben wir die Rangfunktion untersucht und festgestellt, dass die Rangfunktion r auf beiden Mengen $X = \{1,3\}$ und $Y = \{1,2,3\}$ den Wert 2 annimmt. Das uniforme Matroid $\mathcal{U}_{2,4}$ besitzt den Rang 2, d.h. es gibt keine Teilmenge von E, dessen Rang größer wäre als 2, damit ist klar, dass $cl(X) = \{1,2,3,4\} = cl(Y)$. Dagegen ist für $i \in E$ der Abschluss $cl(\{i\}) = \{i\}$, da durch jede Hinzunahme eines Elements $e \in E$ mit $e \neq i$ den Rang echt vergrößern würde.

Nun werden wir schließlich nachweisen, dass mit Hilfe einer subkardinalen, monotonen und submodularen Funktion ein Matroid definiert wird.

4.28 Satz: Seien $r : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$ eine nicht negative, subkardinale, monotone und submodulare Funktion und

$$\mathcal{I} := \{I \subseteq E | \; r(I) = |I|\} \subseteq \mathcal{P}(E)$$

die Menge der Teilmengen $I \subseteq E$ mit $r(I) = |I|$. Dann ist $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Rangfunktion r.

Beweis. Wir zeigen, dass die Axiome der Definition (M1), (M2) und (M3) erfüllt sind:

Ad (M1): Nach (R1) ist die Funktion nicht negativ und subkardinal, d.h. es muss $0 \leq r(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$ gelten, womit bereits (M1) nachgewiesen wurde.

Ad (M2): Angenommen $X, Y \subseteq E$ mit $X \subseteq Y$ und $Y \in \mathcal{I}$. Es gilt $Y = (Y \setminus X) \cup X$ und $\varnothing = (Y \setminus X) \cap X$ und die Submodularität der Rangfunktion liefert

$$r(Y) + r(\varnothing) \leq r(Y \setminus X) + r(X).$$

Aufgrund der Subkardinalität ergibt sich weiter $r(Y \setminus X) \leq |Y| - |X|$ und da die Rangfunktion stets nicht negativ ist folgt $r(\varnothing) = 0$. Gemäß Voraussetzung gilt $Y \in \mathcal{I}$ und damit $r(Y) = |Y|$; fassen wir die bisherigen Erkenntnisse zusammen, so erhalten wir die Ungleichung

$$r(X) \geq r(Y) - r(Y \setminus X) \geq |Y| - (|Y| - |X|) = |X|.$$

Da aufgrund der Subkardinalität auch $r(X) \leq |X|$ gilt, folgt $r(X) = |X|$ und somit $X \in \mathcal{I}$.

Ad (M3): Seien nun $I', I \in \mathcal{I}$ mit $|I'| < |I|$. Angenommen es gilt für alle Elemente $x \in I \setminus I'$, dass $I' \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$, dann würde I bereits im Abschluss $cl(I')$ enthalten sein, da abhängige Elemente den Rang nicht verändern. Zusammen mit (RCL) aus Proposition 4.26 folgt damit $r(I) \leq r(I') < |I|$ was im Widerspruch zu $I \in \mathcal{I}$ steht. D.h. die Annahme war falsch und es gilt (M3). □

4.29 Folgerung: Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $r : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$.

r ist die Rangfunktion von M $\quad\Leftrightarrow\quad$ r erfüllt die Bedingungen (R1), (R2) und (R3).

Beweis. Die Hinrichtung wird in Proposition 4.24, die Rückrichtung in Satz 4.28 bewiesen. □

Abschließend konstatieren wir wichtige Beziehungen zwischen den „Teilmengenarten“ und der Rangfunktion eines Matroids.

4.30 Proposition: Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Rangfunktion $r : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$ und der Menge aller Basen bzw. Kreise $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Dann gilt:

i) $X \in \mathcal{I} \quad\Leftrightarrow\quad |X| = r(X)$,

ii) $X \in \mathcal{B} \quad\Leftrightarrow\quad |X| = r(X) = r(E)$,

iii) $X \in \mathcal{C} \quad\Leftrightarrow\quad \forall x \in X$ gilt $r(X \setminus \{x\}) = r(X) = |X| - 1$.

Beweis. Ad (i):
„$\Rightarrow$:“ Gemäß Voraussetzung sei $X \in \mathcal{I}$. Ist X selbst eine Basis von M, so ist die Behauptung klar; wir dürfen also annehmen, dass X eine echte Teilmenge einer Basis von M ist. In diesem Fall müssen wir eine Basis also eine maximal unabhängige Teilmenge der Restriktion $M_{|X}$ finden. Dazu machen wir uns klar, dass $\mathcal{I}_{|X} = \{I \subseteq X | \ I \in \mathcal{I}\}$ nur aus Teilmengen von X bestehen kann und gemäß Voraussetzung stets X enthält. Dadurch wird die Behauptung $r(X) = |X|$ offensichtlich.

„$\Leftarrow$:“ Nun gelte $r(X) = |X|$, d.h. eine jede Basis der Restriktion $M_{|X} = (X, \mathcal{I}_X)$ besitzt die Mächtigkeit $|X| \in \mathbb{N}_0$. Wie wir bereits in der Hinrichtung festgestellt haben, enthält

$\mathcal{I}_X$ nur Teilmengen von X, somit kommen als Basen nur Teilmengen von X in Frage. Die einzige Teilmenge von X mit Mächtigkeit $|X|$ ist allerdings X selbst, somit muss aufgrund der Definition von $\mathcal{I}_X$ die Menge X unabhängig sein.

Ad (ii): Eine Basis X ist eine maximal unabhängige Menge, somit ist (ii) ein Spezialfall von (i). Für die Zusatzbehauptung $r(X) = r(E)$ ist das Adjektiv „maximal" entscheidend: fügt man der Basis X eine weiteres beliebiges Element $y \in E \setminus X$ hinzu, so enthält $X \cup \{y\}$ einen eindeutig bestimmten Fundamentalkreis und ist damit abhängig. Sind umgekehrt ein (Fundamental-) Kreis C und ein Element $x \in C$ gegeben, dann gibt es zu $C \setminus \{x\}$ stets eine Basis B mit $B \supseteq C \setminus \{x\}$, da $C \setminus \{x\}$ unabhängig ist. Gemäß Definition der Rangfunktion sind jedoch lediglich die maximal unabhängigen Mengen bzw. deren Mächtigkeit für die Bestimmung entscheidend, d.h. sobald eine Menge durch Hinzufügen eines weiteren Elements unabhängig bzw. eine unabhängige Menge um weitere Elemente ergänzt wird, ändert sich der Rang dieser Menge nicht mehr.

Ad (iii):
„⇒:" Sei X ein Kreis, d.h. eine minimal unabhängige Teilmenge von E. Gemäß Proposition 4.12 ist dies äquivalent zur Bedingung

$$X \notin \mathcal{I} \text{ und } \forall x \in X \text{ ist } X \setminus \{x\} \text{ unabhängig.}$$

Somit folgt mit (i), dass $r(X \setminus \{x\}) = |X| - |\{x\}| = |X| - 1$ ist. Die Rückrichtung „⇐" folgt analog durch die äquivalente Umformulierung der Definition eines Kreises. □

4.4 Axiome des Abschlussoperators

Ein Abschlussoperator besitzt eine dem Axiom (B3) sehr ähnliche Austauscheigenschaft, die man auch als **Steinitz-MacLane-Austauscheigenschaft** bezeichnet und die wir in der nächsten Proposition als Bedingung (A4) notieren. Mit Hilfe der dadurch insgesamt vier Bedingungen ist es, ebenso wie mit der Rangfunktion, möglich, ein zur Definition eines Matroids äquivalente Formulierung zu konstruieren. Wie die nächste Proposition zeigt, ist die Steinitz-MacLane-Austauscheigenschaft bereits implizit durch die Bedingungen (A1), (A2) und (A3) gegeben.

4.31 Proposition: Es sei E eine Menge und $cl : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ ein Abschlussoperator. Dann gilt:

(A4) Für alle Teilmengen $X \subseteq E$ und alle $s \in E$ gilt:
Ist $t \in cl(X \cup \{s\}) \setminus cl(X)$, dann ist auch $s \in cl(X \cup \{t\}) \setminus cl(X)$.

Beweis. Es sei $t \in cl(X \cup \{s\}) \setminus cl(X)$, d.h. t ist im Abschluss von $X \cup \{s\}$ enthalten und deswegen gilt $r(X \cup \{s, t\}) = r(X \cup \{s\})$. Ferner gilt aufgrund der Wahl von s die Identität $(cl(X) \cap \{s\}) = \varnothing$ und damit

$$r(X \cup \{s\}) + r(\varnothing) \overset{(R3)}{\leq} r(X) + r(\{s\}) \overset{(R1)}{\leq} r(X) + 1,$$
$$\Rightarrow r(X) < r(X \cup \{s, t\}) = r(X \cup \{s\}) \leq r(X) + 1.$$

Da $(X \cup t) \supsetneq X$ gilt außerdem

$$r(X) < r(X \cup \{t\}) \overset{(R1)}{\leq} r(X) + 1.$$

Da die Rangfunktion nur ganze Zahlen annehmen kann, muss folglich $r(X \cup \{s,t\}) = r(X \cup \{t\})$ und damit $s \in cl(X \cup \{t\})$ gelten. □

Als nächstes zeigen wir, dass aus einer Menge E zusammen mit einem Hüllenoperator ein Matroid konstruiert werden kann. Um den Beweis dieser Behauptung strukturiert zu halten, haben wir eine wichtige Teilbehauptung in eine Proposition ausgelagert.

4.32 Satz: Sei E eine Menge und $cl : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ ein Hüllenoperator mit Steiniz-MacLane-Austauscheigenschaft, also eine Abbildung, die (A1), (A2), (A3) und (A4) erfüllt. Zusammen mit dem Mengensystem

$$\mathcal{I} := \{X \subseteq E | \ \forall x \in X : \ x \notin cl(X \setminus \{x\})\}$$

bildet $M := (E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Abschlussoperator cl.

Um diesen Satz zu beweisen benötigen wir noch folgendes

4.33 Proposition: Seien $X \subseteq E$ und $x \in E$. Gelten $X \in \mathcal{I}$ und $X \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$, dann ist x im Abschluss von X enthalten, d.h. $x \in cl(X)$.

Beweis. Da gemäß Vorausetzung $(X \cup \{x\})$ nicht unabhängig ist, existiert gemäß der Definition von $\mathcal{I}$ ein Element $y \in (X \cup \{x\})$ mit $y \in cl((X \cup \{x\}) \setminus \{y\})$. Im Fall $x = y$ ist $x \in cl(X)$ damit erfüllt. Wir können also annehmen, dass die Elemente x und y verschieden sind. Da $y \in (X \cup \{x\})$ und $x \neq y$ gilt in diesem Fall $(X \cup \{x\}) \setminus \{y\} = (X \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ und $y \in X$. Gemäß Voraussetzung ist X unabhängig und damit gilt für alle $z \in X : z \notin cl(X \setminus \{z\})$. Somit muss y in der Differenzmenge $cl((X \setminus \{y\}) \cup \{x\}) \setminus cl(X \setminus \{y\})$ liegen. Wenden wir nun noch (A4) an, so ergibt sich die Behauptung, da $x \in cl((X \setminus \{y\}) \cup \{y\}) = cl(X)$. □

Die eben bewiesene Proposition werden wir im letzten Teil des nächsten Beweises von Satz 4.32 benötigen. Dabei beachte man, dass die Kontraposition dieser Proposition gerade aussagt:

$$x \notin cl(X) \quad \Rightarrow \quad X \notin \mathcal{I} \ \vee \ X \cup \{x\} \in \mathcal{I} \tag{$\star$}$$

Beweis. Wir müssen nachweisen, dass M die Matroid-Axiome aus der Definition 3.1 erfüllt.

Ad (M1): Die leere Menge $\emptyset$ ist in $\mathcal{I}$ enthalten, da jede Allaussage aufgrund Mangel an Elementen erfüllt ist, d.h. $\mathcal{I}$ ist nich leer. Ist nun $\emptyset \neq X \in \mathcal{I}$ ein Element von $\mathcal{I}$, dann muss nach (A1) auch jede Teilmenge und damit auch die leere Menge enthalten sein.

Ad (M2): Seien nun $I' \subseteq I \in \mathcal{I}$ gegeben, d.h. es gilt gemäß Definition $\forall x \in I : \ x \notin cl(I \setminus \{x\})$. Aufgrund der Eigenschaft (A2) gilt $cl(I') \subseteq cl(I)$. Angenommen I' sei nicht in $\mathcal{I}$ enthalten, dann muss es mind. ein $\widetilde{x} \in cl(I' \setminus \{\widetilde{x}\})$ geben. Dies kann aber nicht sein, da dann auch $\widetilde{x} \in cl(I \setminus \{\widetilde{x}\})$ gelten würde $\lightning$, was im Widerspruch zu $I \in \mathcal{I}$ steht.

Ad (M3): Wir beweisen durch Widerspruch und nehmen an, es gäbe Paare $I', I \in \mathcal{I}$ von Teilmengen mit $|I'| < |I|$, so dass für *alle* $x \in (I \setminus I')$ die Vereinigung $(I' \cup \{x\})$ nicht unabhängig ist. Unter diesen Paaren wählen wir dasjenige Paar mit maximalem $k = |I \cap I'|$, d.h. mit maximalem Schnitt.

Da I gemäß Voraussetzung unabhängig ist, können wir ein $y \in I \setminus I'$ wählen, so dass $y \notin cl(I \setminus \{y\})$ gilt. Zunächst betrachten wir den Fall $I' \subseteq cl(I \setminus \{y\})$. Zusammen mit (A2) und (A3) ergibt sich damit $cl(I') \subseteq cl(I \setminus \{y\})$. Weiter ist $y \notin cl(I \setminus \{y\})$ und damit auch $y \notin cl(I')$. Berücksichtigen wir, dass $I' \in \mathcal{I}$ gilt und wenden $(\star)$ an, so folgt, dass $(I' \cup \{y\}) \in \mathcal{I}$ gilt $\lightning$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass das Paar I, I' das Axiom (M3) nicht erfüllt.

Wir dürfen also festhalten, dass $I' \nsubseteq cl(I \setminus \{y\})$ gelten muss, d.h. es gibt mindestens ein Element t aus der Differenzmenge $I' \setminus cl(I \setminus \{y\})$. Aufgrund der Wahl von t gilt $t \notin cl(I \setminus \{y\})$ und weiter liegt t innerhalb der Menge $I' \setminus I$. Wieder mit $(\star)$ ergibt sich $\widetilde{I} := (I \setminus \{y\}) \cup \{t\} \in \mathcal{I}$. Da $|\widetilde{I} \cap I'| > |I \cap I'| = k$ und aufgrund der Maximalität von k, muss das Paar $\widetilde{I}, I'$ das Axiom (M3) erfüllen. Dies bedeutet aber, dass für $x \in \widetilde{I} \setminus I'$ die Menge $I' \cup \{x\}$ unabhängig ist, doch dieses x liegt ebenso in $I \setminus I'$, d.h. auch das Paar I, I' erfüllt das Axiom (M3) $\lightning$. Ein Widerspruch zur Annahme. □

4.34 Folgerung: Seien E eine Menge und $cl : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ ein Abschlussoperator. Dann gilt:

cl ist der Abschluss eines Matroids auf E $\quad \Leftrightarrow \quad$ cl erfüllt (A1), (A2), (A3) und (A4).

Beweis. Da man mit Hilfe der Rangfunktion r einen Hüllenoperator erklären kann (Proposition 4.26) folgt mit Proposition 4.31 die Hinrichtung. Die Rückrichtung folgt mit Satz 4.32. □

Ein Matroid ist dem Wesen nach *keine* algebraische Struktur, da Verknüpfungen grundsätzlich fehlen. Nichtsdestotrotz ist es überaus gewinnbringend auch für Matroide „Unterräume“ zu studieren, um dadurch Rückschlüsse auf die Eigenschaften desselben zu erhalten. Dank der Rangfunktion und dem sich dadurch ergebenden Abschlussoperator, ist es uns nun auch möglich den Begriff „Unterraum“ in diesem Kontext sinnvoll zu definieren.

4.35 Definition: Sei ein Matroid $M = (E, \mathcal{I})$ gegeben. Die *abgeschlossenen Mengen* von M bezeichnen wir als **Unterräume** von M. Die Unterräume der

- Dimension 1 heißen **Punkte**,
- Dimension 2 heißen **Geraden**,
- Dimension $r(M) - 1$ heißen **Hyperebenen**.

Wir sagen $X \subseteq E$ ist ein **Erzeugendensystem** von M bzw. E, wenn $cl(X) = E$ gilt.

Man beachte, dass eine Hyperebene H ein Unterraum und damit eine abgeschlossene Menge ist. Da die Identität $cl(cl(X)) = cl(X)$ gilt, wirkt sich der Abschlussoperator cl angewendet auf eine Hyperebene H invariant aus, d.h. es gilt $cl(H) = H$. Analoges gilt auch für Punkte oder Geraden bzw. für alle Unterräume eines Matroids. Eine Menge $X \subseteq E$ ist genau dann ein Erzeugendensystem von M, wenn

$$cl(X) = \{e \in E | \ r(X \cup \{e\}) = r(X)\} = E,$$

erfüllt ist, d.h. wenn der Rang von X maximal ist. Der Rang von $X \subseteq E$ ist wiederum definiert als die Kardinalität der maximal unabhängigen Menge der Restriktion $M_{|X} = (X, \mathcal{I}_X)$ mit $\mathcal{I}_X = \{I \subseteq X | \ I \in \mathcal{I}\}$. Somit ist die bezüglich der Inklusion kleinste erzeugende Menge eines Matroids M eine Basis $B \in \mathcal{B}(M)$.

Es stellt sich natürlich sofort die grundsätzliche Frage, wie man Unterräume eines Matroids erkennen kann? Für uniforme Matroide $\mathcal{U}_{m,n}$ bestehen die Unterräume aus allen k-elementigen Teilmengen mit $k \leq m$. Deshalb entsprechen den Hyperebenen von $\mathcal{U}_{m,n}$ den $(m-1)$-elementigen Teilmengen der Grundmenge.

Für Vektormatroide $M[V]$ gibt es einen naheliegenden Zusammenhang zwischen dem Abschluss einer Menge und den Untervektorräumen von V. Ein Beispiel wird dies veranschaulichen.

4.36 Beispiel: Wir betrachten den Vektorraum $V := (\mathbb{F}_3)^2$ über dem Körper $\mathbb{F}_3$ mit genau $3^2 = 9$ Vektoren, die wir wie folgt definieren:

$$\begin{array}{lll} v_7 := (0,2)^T & v_8 := (1,2)^T & v_9 := (2,2)^T. \\ v_4 := (0,1)^T & v_5 := (1,1)^T & v_6 := (2,1)^T, \\ v_1 := (0,0)^T & v_2 := (1,0)^T & v_3 := (2,0)^T. \end{array}$$

Im Folgenden werden wir die Vektoren aus V ohne das Transponiertzeichen notieren. Der Vektorraum V ist zweidimensional, es können also maximal zwei unterschiedliche Vektoren linear unabhängig sein. Alle einelementigen Teilmengen von V, mit Ausnahme des Nullvektors, sind linear unabhängig. Eine linear unabhängige Menge von Vektoren enthält nicht den Nullvektor. Betrachten wir nun eine zweielementige Teilmenge $\{x := (x_1, x_2), y := (y_1, y_2)\}$ aus V. Die beiden Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn x bzw. y kein skalares Vielfaches des jeweils anderen Vektor ist. Da wir den Vektorraum über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_3$ betrachten, existieren für einen einzelnen Vektor aus V genau drei skalare Vielfache. Bildet man die skalaren Vielfachen der vier Vektoren $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,2)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{(0,0);(1,0);(2,0)\} = \langle(1,0)\rangle = \langle(2,0)\rangle, \\ U_2 &:= \{(0,0);(0,1);(0,2)\} = \langle(0,1)\rangle = \langle(0,2)\rangle, \\ U_3 &:= \{(0,0);(1,1);(2,2)\} = \langle(1,1)\rangle = \langle(2,2)\rangle, \\ U_4 &:= \{(0,0);(1,2);(2,1)\} = \langle(1,2)\rangle = \langle(2,1)\rangle. \end{aligned}$$

Die Mengen U_i mit $i = 1,2,3,4$ sind allesamt *eindimensionale* Untervektorräume von V, es sind sogar *alle* eindimensionalen Untervektorräume von V. Stellen wir die Vektoren

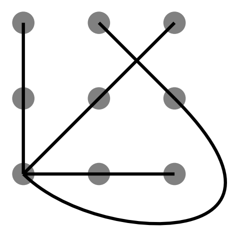


Abb. .4: *Vektorraum* $(\mathbb{F}_3)^2$ *und dessen eindim. Unterräume*

als Punkte und die Unterräume von V als Linien dar, so ergibt sich damit die folgende Skizze.

Die Anordnung der Vektoren haben wir aus dem –zu Beginn dieses Beispiels– aufgeführten Schemas (Definitionen der v_i mit $i = 1, 2, \dots, 9$) übernommen.

Betrachten wir nun das durch V induzierte Matroid $M[V] = (E, \mathcal{I})$, wobei die Grundmenge E gleich $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ist. Offensichtlich sind alle Mengen der Form $\{i\}$ mit $i = 2, 3, \dots, 9$ unabhängig in M, da alle Vektoren v_i mit $i = 2, 3, \dots, 9$ linear unabhängig sind. Diese Vektoren spannen je einen eindimensionalen Unterraum in V auf, wobei je ein Paar v_i, v_j mit $i \neq j$ und $i, j = 2, 3, \dots, 9$ denselben Vektorraum aufspannt.

Lediglich $\varnothing$ und $\{2\}$ bzw. $\{3\}$ sind unabhängige Teilmengen von $\{1,2,3\}$ in M. Die übrigen 5 Teilmengen von $\{1,2,3\}$ sind abhängig, d.h. es gilt $r(\{2\}) = r(\{2,3\} = r(\{1,2,3\}) = r(\{3\}) = 1$. Jede echte Obermenge von $\{1,2,3\}$ würde den Rang hingegen vergrößern. Somit entspricht dem Abschluss von $\{2\}$ der Menge $\{1,2,3\} \subseteq E$. Es sei konstatiert, dass der Unterraum U_1 gerade aus den Vektoren v_1, v_2, v_3 besteht und v_2 ein skalares Vielfaches von v_3 ist (und umgekehrt).

Nach diesem Beispiel liegt folgender Schluss nahe.

4.37 Proposition: Seien V ein K-Vektorraum, $M[V]$ ein Vektormatroid und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine endliche Menge an Vektoren aus V. Ferner sei $X \subseteq \{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & X \text{ ist ein Unterraum von } M[V] \\ \Leftrightarrow\ & \exists X \leq V, \text{ so dass } \{v_i\}_{i \in X} = X \cap \{v_1, \dots, v_n\} \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Im Falle $\{v_1, \dots, v_n\} = V$, ist $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ genau dann ein Unterraum, wenn $\{v_i\}_{i \in X}$ ein Untervektorraum von V ist. Ein Beweis dieser Proposition ist evident, wenn man beachtet, dass eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ in $M[V]$ genau dann unabhängig ist, wenn die entsprechenden Vektoren $\{v_i\}_{i \in I}$ linear unabhängig sind.

4.38 Proposition: Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $X \subseteq E$ eine Teilmenge der Grundmenge. Dann gilt:

$$x \in cl(X) \quad \Rightarrow \quad cl(X \cup \{x\}) = cl(X).$$

Beweis. Wir beweisen durch Widerspruch mit Hilfe der Eigenschaft (A4) des Abschlussoperators cl. Dazu nehmen wir an, es würde $cl(X \cup \{x\}) \neq cl(X)$ gelten. Aus $X \subseteq (X \cup \{x\})$, folgt mit (A2) die Inklusion $cl(X) \subseteq cl(X \cup \{x\})$. Es muss also mindestens ein $t \in cl(X \cup \{x\}) \setminus cl(X)$ geben. Wenden wir nun (A4) darauf an, so folgt, dass dann $x \in cl(X \cup \{t\}) \setminus cl(X)$ gilt $\lightning$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung $x \in cl(X)$, die Annahme war also falsch, d.h. es ist $cl(X \cup \{x\}) = cl(X)$. □

4.39 Proposition: Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $X \subseteq E$ sowie $r : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$ die Rangfunktion von M. Dann gilt

(i) X ist ein Erzeugendensystem von M $\Leftrightarrow$
$r(X) = r(E)$.

(ii) X ist eine Basis von M $\Leftrightarrow$
X ist ein Erzeugendensystem und $\forall x \in X$ ist $(X \setminus \{x\})$ kein Erzeugendensystem.

(iii) X ist eine Hyperebene von M $\Leftrightarrow$
X ist kein Erzeugendensystem, aber $\forall y \in E \setminus X$ ist $(X \cup \{y\})$ ein Erzeugendensystem.

Beweis. Ad (i):
„⇒“: Angenommen X ist ein Erzeugendensystem von E, d.h. $cl(X) = E$. Sei B eine Basis *von* X, dann gilt für alle $y \in X \setminus B$, dass die Menge $B \cup \{y\} \notin \mathcal{I}(M)$ nicht mehr unabhängig ist. Die Voraussetzungen von Proposition 4.33 sind erfüllt, es folgt $y \in cl(B)$ und da y aus $X \setminus B$, ist X bereits im Abschluss $cl(B)$ enthalten. Zusammen mit der Voraussetzung gilt dann

$$E = cl(X) \subseteq cl(B) \subseteq E \quad \Rightarrow \quad cl(X) = cl(B) = E.$$

Alle $z \in E \setminus B$ liegen also bereits im Abschluss der Basis von X, was gemäß Definition des Abschlusses gerade bedeutet, dass der Rang von B durch Vereinigung mit $z \notin B$ nicht mehr vergrößert werden kann. Da B nach Wahl unabhängig in M ist, kann dies nur dann der Fall sein, wenn $B \cup \{z\} \notin \mathcal{I}$ gilt, d.h. B eine Basis *von* M ist. Deshalb muss $r(X) = |B| = r(M)$ gelten, da alle Basen eines Matroids dieselbe Mächtigkeit besitzen.

„⇐“: Es gelte nun $r(X) = r(E)$, d.h. die maximal unabhängigen Mengen des Matroids M und der Restriktion $M_{|X}$ besitzen dieselbe Mächtigkeit. Sei $B \subseteq X$ eine Basis von X, dann muss B auch in $\mathcal{B}(M)$ liegen, da B gemäß Definition $\mathcal{I}(M_{|X})$ eine unabhängige Menge aus $\mathcal{I}(M)$ ist und $r(X) = r(E)$ gilt. Wir müssen nun zeigen, dass $cl(X) = E$ gilt, d.h. alle $e \in E$ wirken sich invariant auf den Rang $r(X)$ aus, d.h. $r(X) = r(X \cup \{e\})$. Der Rang einer Basis ist maximal, d.h. $r(B)$ kann durch weitere Elemente aus $E \setminus B$ nicht verändert werden. Da B aber eine Teilmenge von X ist, muss auch $r(B) = r(X) = r(X \cup \{e\})$ für alle $e \in E \setminus B$ gelten. Natürlich gilt dann auch $e \in E \setminus X$. Es folgt $cl(X) = E$ die Behauptung, da offensichtlich auch $r(X \cup \{e\}) = r(X)$ für $e \in X$ gilt.

Ad (ii):
„⇒“: Ist X eine Basis, dann ist offensichtlich X auch ein Erzeugendensystem von M, da $r(X) = r(E)$ gilt. Wählt man ein Element $x \in X$, dann ist klar, das der Rang der

Restriktion $M_{|X \setminus \{x\}}$ echt kleiner ist als der von M. Somit kann $X \setminus \{x\}$ kein Erzeugendensystem von M sein.

„$\Leftarrow$“: Es sei nun X ein minimales Erzeugendensystem des Matroids M. Mit (i) folgt damit $r(X) = r(E)$. Aufgrund der Voraussetzung ist für alle $x \in X$ die Menge $X \setminus \{x\}$ nicht mehr ein Erzeugendensystem von M, d.h. $cl(X) \neq cl(X \setminus \{x\})$. Mit Hilfe der Kontraposition von Proposition 4.38 folgt damit $x \notin cl(X \setminus \{x\})$. Mit Hilfe von $(\star)$ muss deshalb $X \in \mathcal{I}(M)$ gelten und da $r(X) = r(M)$ gilt, ist X eine Basis von M.

Ad (iii): Analog zu (ii). □

Auch die Kreise eines Matroids können mit Hilfe des Abschlussoperators charakterisiert werden, dazu folgendes

4.40 Proposition: Sei M ein Matroid mit Grundmenge E und $X \subseteq E$. Dann gilt:

(i) X ist ein Kreis $\Leftrightarrow$
X ist eine minimale Menge bzgl. der Eigenschaft $\forall x \in X : x \in cl(X \setminus \{x\})$

(ii) $cl(X) = X \cup \{x : \ M$ besitzt einen Kreis C, so dass $x \in C \subseteq X \cup \{x\}\}$.

Die Bedingung $\forall x \in X : x \in cl(X \setminus \{x\})$ aus (i) besagt für die Menge X, dass wir ein beliebiges Element aus dieser Menge entfernen dürfen und der Abschluss sich dabei nicht ändert. Unter allen Mengen, die diese Eigenschaft erfüllen ist X minimal gewählt.

Beweis. Ad (i):
„$\Rightarrow$“: Es sei X ein Kreis also eine minimal abhängige Menge, d.h. $\forall x \in X$ ist $(X \setminus \{x\})$ abhängig. Mit anderen Worten: es ist $(X \setminus \{x\})$ unabhängig doch $(X \setminus \{x\}) \cup \{x\}$ ist abhängig. Wir können Proposition 4.33 anwenden und erhalten $x \in cl(X \setminus \{x\})$.

„$\Leftarrow$“: Die Rückrichtung können wir mit Hilfe der Definition des Abschlussoperator

$$cl(X \setminus \{x\}) = \{e \in E | \ r(X \setminus \{x\}) = r(X \setminus \{x\} \cup \{e\})\}$$

für die Menge $(X \setminus \{x\}) \subseteq E$ zeigen. Gemäß Voraussetzung gilt für alle $x \in X$ also $x \in cl(X \setminus \{x\}) :\Leftrightarrow r(X \setminus \{x\} \cup \{x\}) = r(X) = r(X \setminus \{x\})$ gelten. Mit Proposition 4.30 folgt damit die Behauptung.

Ad (ii):
Angenommen es sei $x \in cl(X) \setminus X$, dann gilt gemäß Definition des Abschluss $r(X \cup \{x\}) = r(X)$. Sei B nun eine Basis von X, dann ist $B \cup \{x\}$ abhängig und enthält somit einen Fundamentalkreis $C(B,x)$ mit $x \in C(B,x)$ nach Proposition 4.16. Somit gilt auch $x \in C(B,x) \subseteq X \cup \{x\}$. Gibt es also einen derartigen Kreis, dann gilt nach (i) und (A2) auch $x \in cl(C(B,x) \setminus \{x\}) \subseteq cl(X)$. □

Teil (ii) aus der letzten Proposition ist von großer Bedeutung, denn es beschreibt, wie man den Abschluss einer beliebigen Teilmenge $X \subseteq E$ bestimmt. Kreise können bspw. in graphischen (aber auch in geometrischen) Matroiden einfach bestimmt werden. Eine Anwendung dessen werden Sie in Teilabschnitt 4.6 kennen lernen.

4.5 Restriktion/Reduktion eines Matroids

In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, wie man aus einem gegebenen Matroid weitere konstruieren kann. Eine einfache Möglichkeit dies zu bewerkstelligen, ist, die Grundmenge E eines Matroids $M = (E,\mathcal{I})$ um eine Teilmenge $T \subseteq E$ zu beschneiden. Damit wir aus M ein weiteres Matroid auf der Grundmenge $F := (E \setminus T)$ erhalten, müssen wir natürlich auch die Mengensysteme der unabhängigen und abhängigen Mengen entsprechend anpassen. Wir wiederholen hier noch einmal die Definition der Restriktion eines Matroids.

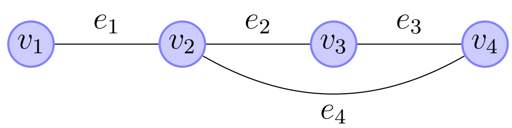
4.41 Definition: Seeni $M = (E,\mathcal{I})$ ein Matroid und $F \subseteq E$. Das Matroid $M_{|F} := (F, \mathcal{I}(M_{|F}))$ mit

$$\mathcal{I}(M_{|F}) = \mathcal{I}_{|F} := \{I \subseteq F|\ I \in \mathcal{I}\}$$

nennen wir die **Restriktion von** M **auf** F und sagen auch $M_{|F}$ entsteht durch **Löschen von** $T = E \setminus F$ oder durch **Reduktion von** T und wird in diesem Fall durch $M \setminus T$ notiert.

Wie wir bereits wissen erfüllt $M_{|F}$ die Axiome eines Matroids, d.h. die Restriktion $M_{|F}$ ist ein Unterraum von M. Wie wir bereits gesehen haben wird ein Matroid auch durch seine Basen und Kreise charakterisiert. Es ist daher naheliegend zu fragen, welche Form das Basis- bzw. Zirkuitsystem einer Restriktion $M_{|F}$ besitzt?

4.42 Beispiel: Wir untersuchen nun das graphische Matroid $M[G]$, wobei der Graph $G = (V, K, \delta)$ durch die Darstellung



definiert sein soll. Offensichtlich besitzt dieser Graph die Grundmenge $E := \{1, 2, 3, 4\}$ und

$$\mathcal{I} = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\}; \{1,2,3\}; \{1,2,4\}; \{1,3,4\}\},$$
$$\mathcal{C} = \{\{2,3,4\}; \{1,2,3,4\}\}$$

als Menge aller unabhängigen Mengen bzw. Kreise. Bilden wir nun die Restriktion $M[G]_{|1,2,4}$, oder mit anderen Worten, löschen wir das Element $\{3\}$ aus der Grundmenge E, so erhalten wir ein Matroid mit Grundmenge $F := \{1, 2, 4\}$ und

$$\mathcal{I}_{|F} = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{4\}; \{1,2\}; \{1,4\}; \{2,4\}; \{1,2,4\}\},$$

als Menge aller unabhängigen Mengen der Restriktion. Es ist somit offensichtlich $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 4\}\}$ das Basissystem der Restriktion $M[G]_{|1,2,4}$.

Betrachten wir nun den Graphen $G \setminus \{e_3\}$ gemäß Definition 2.6 (v) und bildet aus diesem das zugehörigen graphische Matroid $M[G \setminus \{e_3\}]$, so stellt man fest, dass dieses gerade der Restriktion $M[G]_{|1,2,4}$ entspricht.

Das letzte Beispiel legt Folgende Beobachtung nahe: Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $T \subseteq E$ bzw. $E \setminus T = F$, dann gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\mathcal{B}(M_F) = \mathcal{B}(M \setminus T) \text{ ist die Menge aller max. Elemente von } \{B \setminus T |\ B \in \mathcal{B}(M)\},$$
$$\mathcal{C}(M_F) = \mathcal{C}(M \setminus T) = \{C \subseteq F = E \setminus T |\ C \in \mathcal{B}(M)\}.$$

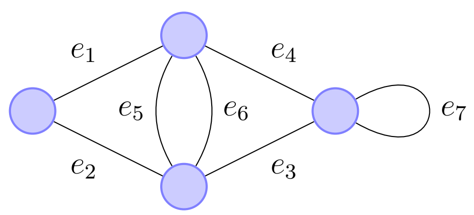
4.6 Kreismatroide und der Abschluss

In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, durch welche Regeln die Unterräume eines Kreismatroids bestimmt sind. Um die Unterräume, d.h. die abgeschlossenen Teilmengen eines Matroids auszumachen, benötigen wir nur wenige Erkenntnisse der letzten Abschnitte. Ein Kreis eines Matroids ist eine minimal abhängige Menge (vgl. Definition 4.10), d.h. jede Obermenge eines Kreises ist ebenfalls abhängig. Weiter sollten Sie sich in Erinnerung rufen, dass der Abschluss einer Teilmenge $X \subseteq E$ eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$ definiert ist durch $cl(X) = \{e \in E |\ r(X) = r(X \cup \{e\})\}$ (vgl. Proposition 4.26). D.h. der Abschluss von X besteht aus X selbst und all den Elementen $e \in E \setminus X$, welche den Rang nicht vergrößern. Kreise besitzen als minimal abhängige Mengen die Eigenschaft (vgl. Proposition 4.30)

$$X \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X \text{ gilt } r(X \setminus \{x\}) = r(X) = |X| - 1.$$

Bilden wir also aus einer beliebigen Basis $B \in \mathcal{B}$ und einem beliebigen Element $x \in E \setminus B$ den Fundamentalkreis $C := C(B, x)$, so besitzen die Basis B und der Kreis C denselben Rang. Fügt man dem Kreis C noch weitere Elemente hinzu, so wird sich dessen Rang nicht mehr ändern, da diese Mengen nur noch abhängig sein können. Insgsamt ergibt sich eine einfache Strategie, wie man Unterräume aus graphischen Matroiden ablesen kann. Im Übrigen wurde dies bereits in Proposition 4.40 (ii) proklamiert.

4.43 Beispiel: Der Graph $G = (V, K, \delta)$ sei definiert durch die folgende Darstellung:



Die Grundmenge des Kreismatroids $M[G]$ ist $E := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und offensichtlich ist $M[G]$ vom Rang 3. Um die Unterräume des Graphen aufzudecken, müssen wir die abgeschlossenen Mengen von $M[G]$ berechnen. Für jedes Element $e \in E$ gilt

$$cl(\{e\}) = \{e\} \cup \{7\},$$

da $\{7\}$ eine Schleife ist und somit als minimal abhängige Menge den Rang von $\{e\}$ nicht verändert. Aus demselben Grund ist die Schleife $\{7\}$ in jedem Unterraum enthalten. Fügen wir jedoch ein Element $f \in E \setminus \{e, 7\}$ der Menge $\{e\}$ hinzu, so würde sich der Rang erhöhen, wenn die Elemente $\{e, f\}$ kein Paar paralleler Elemente ist (, d.h. $\{e, f\} \neq$

$\{5,6\}$). Als nächstes bestimmen wir beispielhaft den Abschluss der Menge $\{1,2\}$, wobei wir uns das Ergebnis

$$cl(\{1,2\}) = \{1,2\} \cup \{7\} \cup \{5\} \cup \{6\} = \{1,2,5,6,7\}$$

direkt vorgeben. Es ist klar, dass $\{7\}$ im Abschluss $cl(\{1,2\})$ enthalten ist. Vereinigt man $\{1,2\}$ mit $\{5\}$, so erhalten wir den Kreis $\{1,2,5\}$ und nach Proposition 4.30 gilt $r(\{1,2\}) = r(\{1,2,5\}) = 2$. Entsprechendes gilt auch für die Vereinigung von $\{1,2\}$ mit $\{6\}$. Parallele Elemente bilden einen Kreis und offensichtlich sind $\{5\}$ und $\{6\}$ zueinander parallel. Als Folge sind entweder beide Elemente $\{5\}$ und $\{6\}$ oder keines derselben in einem Unterraum von $M[G]$ enthalten.

Analog kann man folgern, dass $cl(\{3,4\}) = \{3,4,5,6,7\}$ gilt. Dagegen besitzt der Abschluss von $\{1,3\}$ nur drei Elemente, es gilt nämlich $cl(\{1,3\}) = \{1,3,7\}$. Fügt man nämlich der Menge $\{1,3\}$ ein Element aus $E \setminus \{1,3,7\}$ hinzu, so würde sich ein aufspannender Baum und damit eine Basis ergeben mit Rang 3. Analoges kann für den Abschluss der Menge $\{2,4\}$ ausgesagt werden.

5 Dualität und Matroide

5.1 Definition und Beispiele

Für die Dualität eines Matroids M sind die Basen B aus $\mathcal{B}(M)$ die Dreh- und Angelpunkte, denn mit Hilfe der Komplemente einer jeden Basis von M kann ein zu $\mathcal{B}$ komplementäres Basissystem definiert werden. Mit der in der Folgerung 4.7 genannten Äquivalenz

$\mathcal{B}$ ist die Menge aller Basen von M $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ erfüllt die Bedingungen (B1) und (B2).

ergibt sich damit die Existenz des „dualen" Matroids. Damit diese Argumentation greifen kann, muss zunächst gezeigt werden, dass die Komplementmenge zu $\mathcal{B}$ tatsächlich ein Basissystem erklärt; einen ersten Schritt auf dieses Ziel zu, gehen wir sogleich:

Erfüllt ein Mengensystem $\mathcal{B} \neq \varnothing$ das zweite Basisaxiom

(B2) Für alle Basen $B, B' \in \mathcal{B}$ gilt:
$\forall x \in B \setminus B'$ existiert ein $y \in B' \setminus B$, so dass $(B \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ in $\mathcal{B}$ liegt.

dann auch die in der nächsten Proposition davon abgewandelte Version.

5.1 Proposition: Die Menge aller Basen $\mathcal{B}(M)$ eines Matroids M erfüllt die Bedingung

(B2)* Für alle Basen $B, B' \in \mathcal{B}$ gilt:
$\forall x \in B' \setminus B$ existiert ein $y \in B \setminus B'$, so dass $(B \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ in $\mathcal{B}$ liegt.

Man mache sich den Unterschied zwischen (B2) und (B2)* klar!

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass gemäß Proposition 4.16 die Menge $B \cup \{x\}$ eindeutig einen Fundamentalkreis $C(x,B)$ definiert. Da abhängige Mengen im Vergleich zu unabhängigen Mengen entweder echte Obermengen sind oder aber die Mengen disjunkt zueinander liegen, kann die Differenzmenge $C(x,B) \setminus B'$ nicht leer sein. Deshalb ist es möglich ein y aus $C(x,B) \setminus B'$ zu wählen und da $x \in B'$, muss y auch in $B \setminus B'$ enthalten sein. Aufgrund der Wahl von x und y gilt die Identität $\widetilde{B} := (B \setminus \{y\}) \cup \{x\} = (B \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ und da die Menge (aufgrund der Wahl von y) $(B \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ nicht den Fundamentalkreis $C(x,B) \subseteq B \cup \{x\}$ enthält, muss $\widetilde{B}$ unabhängig sein. Ferner besitzt $\widetilde{B}$ dieselbe Mächtigkeit wie B bzw. B', d.h. $\widetilde{B}$ ist eine Basis. □

Der folgende Satz liefert uns schließlich das noch ausstehende Puzzleteil.

5.2 Satz: Sei $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{P}(E)$ ein Mengensystem definiert durch

$$\mathcal{B}^* := \{E \setminus B | \; B \in \mathcal{B}\}.$$

Das Mengensystem $\mathcal{B}^*$ ist die Menge aller Basen eines Matroids mit der Grundmenge E.

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathcal{B}^*$ die Axiome der Basis erfüllt.

Ad (B1): Da das Mengensystem $\mathcal{B}$ nicht leer ist, ist dies auch für $\mathcal{B}^*$ der Fall.

Ad (B2): Seien nun $B_1^*, B_2^* \in \mathcal{B}^*$ und $x \in B_1^* \setminus B_2^*$. Für $i = 1,2$ sei $B_i := E \setminus B_i^*$, dann sind diese B_i offensichtlich Basen, d.h. $B_i \in \mathcal{B}$. Ferner ist die Identität

$$B_1^* \setminus B_2^* = B_2 \setminus B_1 \tag{$\diamond$}$$

erfüllt, dies kann man sich z.B. mit Hilfe eines Venn-Diagramms vor Augen führen. Nach (B2)* gibt es nun zu jedem $x \in B_2 \setminus B_1$ ein $y \in B_1 \setminus B_2$, so dass $(B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}(M)$. Aufgrund der Identität ($\diamond$) liegt y dann auch in $B_2^* \setminus B_1^*$ und das bedeutet, dass $E \setminus ((B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\}) \in \mathcal{B}^*(M)$ gilt. Da weiter

$$E \setminus ((B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\}) = ((E \setminus B_1) \setminus \{x\}) \cup \{y\} = (B_1^* \setminus \{x\}) \cup \{y\}$$

gilt, können wir folgern, dass $\mathcal{B}^*(M)$ die Bedingung (B2) erfüllt. Damit sind beide Basis-Axiome nachgewiesen, die Behauptung folgt nun mit Satz 4.6. □

Aufgrund des letzten Satzes und der Bemerkung zu Beginn dieses Abschnitts, ist die Existenz eines „dualen“ Matroids nachgewiesen. Die noch ausstehende Definition holen wir nun nach.

5.3 Definition: Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{B}^*(M) \subseteq \mathcal{P}(E)$ ein Mengensystem definiert durch

$$\mathcal{B}^*(M) = \mathcal{B}^* := \{E \setminus B | \; B \in \mathcal{B}(M)\}.$$

Das Mengensystem $\mathcal{B}^*(M)$ zusammen mit der Grundmenge E bilden ein Matroid $M^* := (E, \mathcal{B}^*(M))$. Dieses Matroid nennen wir das **Dual von** M oder das zu M **duale Matroid** M^*.

Die Basen, Kreise, Hyperebenen von M^* heißen

- **Cobasen**,
- **Cokreise**,
- **Cohyperebenen**

von M. Eine unabhängige bzw. erzeugende Menge X^* aus M^* heißt **counabhängig** bzw. **coerzeugend** in M. Die **Rangfunktion** von M^* notieren wir durch $r^* : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$ und nennen $r^*(X^*)$ den **Corang** von X^* in M.

Ist X eine Teilmenge von E, dann notieren wir (falls nicht anders erwähnt) deren Komplement $E \setminus X$ kurz durch X^*. Ist $B \in \mathcal{B}(M)$ eine Basis, so nennen wir $B^* = (E \setminus B)$ die zu B duale Basis; analog bei Kreisen und Hyperebenen.

Das Dual M^* von M ist also ein Matroid auf derselben Grundmenge E, dessen Basissystem gerade die Komplementärmenge

$$\mathcal{B}(M^*) = \mathcal{B}^* = \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{B}(M)$$

ist. Deshalb ist eine Menge in M^* nur dann abhängig, wenn sie disjunkt zu einer jeden Basis $B \in \mathcal{B}(M)$ ist. Analoge Aussagen können auch für abhängige Mengen, Kreise oder Hyperebenen getroffen werden.

5.4 Beispiel: Wir betrachten das uniforme Matroid $\mathcal{U}_{3,4}$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = \{ & \varnothing;\ \{1\};\ \{2\};\ \{3\};\ \{4\};\ \{1,2\};\ \{1,3\};\ \{1,4\};\ \{2,3\};\ \{2,4\};\ \{3,4\};\\ & \{1,2,3\}; \{1,2,4\}; \{1,3,4\}; \{2,3,4\}\ \}\end{aligned}$$

als Menge aller unabhängigen Mengen von $\mathcal{U}_{3,4}$ und entsprechend besteht das Mengensystem aller abhängigen Mengen

$$\{\ \{1,2,3,4\}\ \}$$

nur aus einem Element, der einzigen vierelementigen Menge $\{1,2,3,4\}$ von $\mathcal{U}_{3,4}$. Offensichtlich sind

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathcal{U}_{3,4}) &= \{\ \{1,2,3\};\ \{1,2,4\};\ \{1,3,4\};\ \{2,3,4\}\ \} \quad \text{und}\\ \mathcal{C}(\mathcal{U}_{3,4}) &= \{\ \{1,2,3,4\}\ \}.\end{aligned}$$

Die Menge der Cobasen $\mathcal{B}^*$ von $\mathcal{U}_{3,4}$ entspricht somit

$$\mathcal{B}^* = \{\{1,2,3,4\} \setminus B |\ B \in \mathcal{B}\} = \{\ \{1\};\ \{2\};\ \{3\};\ \{4\}\ \},$$

d.h. das zu $\mathcal{U}_{3,4}$ duale Matroid ist auf $E = \{1,2,3,4\}$ durch einelementige Basen bestimmt oder anders formuliert: die Cobasen von $\mathcal{U}_{3,4}$ sind die einelementigen Mengen von E. Die Kreise aus $\mathcal{U}^*_{3,4}$ sind gerade die zweielementigen Teilmengen von E und entsprechen in $\mathcal{U}_{3,4}$ gerade den Hyperebenen. Es ist offensichtlich, dass das Dual von $\mathcal{U}_{3,4}$ gerade $\mathcal{U}_{1,4}$ entspricht.

Die Basen eines uniformen Matroids $\mathcal{U}_{m,n}$ entsprechen gerade den m-elementigen Teilmengen der Menge $\{1,2,\dots,n\}$. Somit ist das Dual $\mathcal{U}^*_{m,n}$ durch $(n-m)$-elementige Teilmengen von $\{1,2,\dots,n\}$ charakterisiert. Dadurch ergibt sich

$$\mathcal{U}^*_{m,n} = \mathcal{U}_{n-m,n}. \tag{DU}$$

Nun bestimmen wir noch das Dual zu einem Vektormatroid, auf das wir uns im nächsten Abschnitt noch beziehen werden.

5.5 Beispiel: Wir untersuchen das Vektormatroid $M[A] = (E,\mathcal{I})$, wobei die Matrix A definiert ist durch

$$A := \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

mit Einträgen aus $\mathbb{R}$. Die Matrix A besteht aus insgesamt vier Spaltenvektoren, somit ist $E = \{1,2,3,4\}$. Das Mengensystem aller unabhängigen Mengen ist durch

$$\mathcal{I} := \{\{1\};\{2\};\{3\};\{4\};\{1,3\};\{1,4\};\{2,3\};\{2,4\};\{3,4\}\}$$

gegeben und somit ist

$$\mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{I}$$

die Menge aller abhängigen Teilmengen von E. Die Menge aller Basen ist offensichtlich $\mathcal{B} = \{\{1,3\};\{1,4\};\{2,3\};\{2,4\};\{3,4\}\ \}$. Das Dual von $M[A]$ ist somit definiert durch die Komplemente der Basen B aus $\mathcal{B}$, d.h.

$$\mathcal{B}(M[A]^*) := \{E \setminus B |\ B \in \mathcal{B}\} = \{\{2,4\};\{2,3\};\{1,4\};\{1,3\};\{1,2\}\}.$$

5.6 Folgerung: Seien E eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ ein System von Teilmengen von E. Dann gilt:

$$\mathcal{B} \text{ ist Basissystem eines Matroids } (E,\mathcal{I}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \text{ erfüllt (B1) und (B2)}^*$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Es sei nun $\mathcal{B}$ die Menge aller Basen eines Matroids $M = (E,\mathcal{I})$. Mit Proposition 4.4 und Satz 5.2 folgt die Gültigkeit von (B1), (B2) und (B2)*.

„$\Leftarrow$“: Nun erfülle $\mathcal{B}$ die Bedingungen (B1) und (B2)*. Betrachten wir sodann das Mengensystem

$$\mathcal{B}' := \{E \setminus B |\ B \in \mathcal{B}\},$$

dann erfüllt $\mathcal{B}$ gemäß den Voraussetzungen (B1). Die Bedingung (B2) ist ebenso erfüllt, da $E \setminus (E \setminus B) = B$ und (B2)* gemäß Voraussetzung gilt. Aufgrund von Folgerung 4.7 ist $\mathcal{B}'$ damit das Basissystem eines Matroids M auf der Grundmenge E. Deshalb muss $\mathcal{B}$ die Menge aller Basen des dazu dualen Matroids M^* sein.

□

5.2 Attribute eines Duals

Die mengentheoretischen Zusammenhänge zwischen einem Matroid und seinem Dual sind für die nun folgenden Beweise grundlegend. Ist $X \subseteq E$ eine unabhängige Menge und B dessen Basis, so dass $X \subseteq B$ gilt.

$$\begin{array}{ccc} X^* = E \setminus X \\ \uparrow\subseteq \quad\quad \subseteq\downarrow \\ B^* = E \setminus B \end{array}$$

Das Diagramm ist intuitiv zu verstehen und visualisiert die Beziehungen zwischen den Mengen. Es fällt auf, dass sich die Teilmengenbeziehung für die dualen Mengen gerade umkehren. Analoges würde man erhalten, wenn man $B \subseteq X$ voraussetzt, d.h. wenn X eine erzeugende Menge von E ist.

5.7 Proposition: Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $X \subseteq E$ eine Teilmenge. Dann gilt:

(i) $(M^*)^* = M$.

(ii) X ist unabhängig in M $\Leftrightarrow$ $E \setminus X$ ist coerzeugend in M.

(iii) X erzeugt M $\Leftrightarrow$ $E \setminus X$ ist counabhängig in M.

(iv) X ist Hyperebene von M $\Leftrightarrow$ $E \setminus X$ ist Cokreis in M.

(v) X ist Kreis von M $\Leftrightarrow$ $E \setminus X$ ist Cohyperebene in M.

Beweis. Ad (i): Das Dual von M ist bestimmt durch das Basissystem

$$\mathcal{B}^*(M) := \{E \setminus B |\ B \in \mathcal{B}(M)\}$$

und entsprechend ist das Dual des Duals desfiniert durch

$$(\mathcal{B}^*(M))^* := \{E \setminus (E \setminus B) |\ B \in \mathcal{B}(M)\} = \{B |\ B \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}.$$

Ad (ii):
„⇒“: Sei X unabhängig in M, dann existiert eine Basis B von M die X als Teilmenge enthält. Aufgrund der Definition des Duals existiert eine dazu duale Basis $B^* \in \mathcal{B}(M^*)$ die *Teilmenge* von $X^* := (E \setminus X)$ ist. Aufgrund von $B^* \subseteq (E \setminus X)$ gilt wegen (R2) die Ungleichung $r^*(B^*) \leq r^*(X^*)$ und da B^* eine Basis des Duals von M ist, muss mit Proposition 4.30 ii) die Identität $r^*(B^*) = r^*(E)$ gelten. Insgesamt folgt also $r^*(E \setminus X) = r^*(X^*) \geq r^*(B^*) = r^*(E)$ und mit Proposition 4.39 (i) folgt die Behauptung.

„⇐“: Da alle Schritte aus der Hinrichtung auch umkehrbar sind, ist nichts weiter zu zeigen.

Ad (iii): Hier beweisen wir nur die Hinrichtung „⇒“, da die Rückrichtung wieder gleich dem umgekehrten Weg entspricht. Beachten Sie auch die „Symmetrie“ zwischen diesem und dem Beweis von (ii), denn letztlich findet nur ein Rollentausch statt!

Es sei $cl(X) = E$, d.h. X ist ein Erzeugendensystem von M. Somit existiert eine Basis B von M, die X als Teilmenge enthält, d.h. es gilt $B \subseteq X$. Die zu B duale Basis $B^* = E \setminus B$ enthält dann die Menge $X^* = E \setminus X$, d.h. $X^* \subseteq B^*$. Da B^* eine Basis und somit unabhängig ist, muss auch jede Teilmenge unabhängig sein, womit das Gewünschte bereits gezeigt wurde.

Ad (iv): Sei X eine Hyperebene, d.h. $r(X) = r(E) - 1$. Da X eine unabhängige Menge ist, existiert eine Basis B von M, welche X als echte Teilmenge enthält, d.h. es gilt $X \subsetneq B$ und somit $r(X) < r(B)$. Die zu B duale Basis $B^* = E \setminus B$ ist somit echte Teilmenge von $X^* = E \setminus X$, d.h. $r^*(B^*) < r^*(X^*)$. Die Menge X^* kann somit nicht unabhängig sein in M^*. Da X eine Hyperebene ist können wir zu dieser Menge lediglich eine Element $y \in (E \setminus X)$ hinzufügen, so dass daraus eine Basis wird. Für $X^* = E \setminus X$ bedeutet das, dass wir lediglich ein Element $y^* \in (E \setminus (E \setminus X)) = X$ entfernen dürfen, so dass aus X^* eine Basis wird. Mit 2. aus Proposition 4.12 folgt damit die Behauptung.

Die Rückrichtung von (iv) sowie (v) bleibt jedem Einzelnen überlassen und sollte nach dem bisher bewiesenen kein Problem darstellen.

□

5.8 Folgerung: Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und die Mengensysteme $\mathcal{B}(M), \mathcal{C}(M)$, $\mathcal{H}(M), \mathcal{B}(M^*)$, $\mathcal{C}(M^*)$ sowie $\mathcal{H}(M^*)$ seien die Menge aller Basen, Kreise, Hyperebenen, Cobasen, Cokreis und aller Cohyperebenen von M. Dann gilt:

(i) $\mathcal{B}(M)$ ist komplementär zu $\mathcal{B}(M^*)$;

(ii) $\mathcal{C}(M)$ ist komplementär zu $\mathcal{H}(M^*)$;

(iii) $\mathcal{H}(M)$ ist komplementär zu $\mathcal{C}(M^*)$.

Beweis. Ad (i): Gemäß Definition. Ad (ii) und (iii): Folgt direkt aus Proposition 5.7. □

Der Beweis von zu (iv) aus Proposition 5.7 wirft eine weitere wichtige Frage auf, die es zu klären gilt:

Wie hängen die Rangfunktion von M und M^* zusammen?

Um darauf eine Antwort geben zu können benötigen wir folgendes

5.9 Proposition: Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $I_1, I_2^* \subseteq E$ mit $I_1 \cap I_2^* = \emptyset$, so dass I_1 unabhängig ist und I_2^* counabhängig.
Dann besitzt M eine Basis B_1 von M und eine Cobasis B_2^*, so dass $I_1 \subseteq B_1$ und $I_2^* \subseteq B_2^*$ sowie $(B_1 \cap B_2^*) = \emptyset$ gilt.

Beweis. Gemäß Voraussetzung ist $I_2^* = E \setminus I_2$ counabhängig, d.h. unabhängig im Dual M^* von M. Das ist nach 5.7 genau dann der Fall, wenn I_2 ein Erzeugendensystem von M ist. Da $(E \setminus I_2^*) = E \setminus (E \setminus I_2) = I_2$ gilt, ist die Menge $I_1 \in \mathcal{I}(M)$ unabhängig in der Restriktion $M_{|(E \setminus I_2^*)}$ und es gilt $I_1 \subseteq I_2$. Deshalb gibt es zu I_1 eine Basis B_1 der Restriktion mit $I_1 \subseteq B_1$. Es ist $I_2 = (E \setminus I_2^*)$ ein Erzeugendensystem von M, deshalb muss $r(B_1) = r(E \setminus I_2^*) = r(E)$ und $B1 \subseteq I_2$ gelten, d.h. B_1 ist auch eine Basis in M.

Wie wir bereits festgestellt haben ist $I_1 \subseteq B_1 \subseteq I_2$, weshalb dann $I_2^* \subseteq (E \setminus B_1)$ gilt. Da auch $I_1 \subseteq B_1$ gilt, sind die Basen B_1 und $B_2^* := (E \setminus B_1)$ die gesuchten. □

Nun können wir eine Antwort auf die gestellte Frage geben.

5.10 Satz: Für alle Teilmengen $X \subseteq E$ eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$ gilt:

$$r^*(X) = |X| - r(M) + r(E \setminus X). \qquad \text{(Rangformel)}$$

Beweis. Sei B_X^* eine Basis der Restriktion M_X^* und $B_{E\setminus X}$ eine Basis der Restriktion $M_{E\setminus X}$. Dann gelten aufgrund der Definitionen die Identitäten $r^*(X) = |B_X^*|$ sowie $r(E \setminus X) = |B_{E\setminus X}|$. Die Basis B_X^* ist in M^* unabhängig und somit counabhängig in M und natürlich ist $B_{E\setminus X}$ unabhangig in M. Die Voraussetzungen der letzten Propositions sind erfüllt, es folgt die Existenz einer Basis $B_1 \in \mathcal{B}(M)$ und einer Cobasis $B_2^* \in \mathcal{B}(M^*)$, so dass $B_{E\setminus X} \subseteq B_1$, $B_X^* \subseteq B_2^*$ und $B_1 \cap B_2^* = \varnothing$ gilt. Da aber $B_{E\setminus X}$ und B_X^* jeweils Basen der Restriktionen sind, muss damit

$$\begin{aligned} B_1 \cap (E \setminus X) &= B_{E\setminus X} \quad \text{und} \\ B_2^* \cap X &= B_X^* \end{aligned}$$

gelten. Da B_1 bereits die Basis der Restriktion auf $(E \setminus X)$ enthält, muss diese nur noch um den restlichen Teil aus X ergänzt werden, d.h. es gilt:

$$B_1 = B_{E\setminus X} \mathbin{\dot\cup} (B_1 \cap X) \quad \Rightarrow \quad |B_1 \cap X| = |B_1| - |B_{E\setminus X}|.$$

Zusammen mit den Eigenschaften der Basen B_1 und B_2^* ergibt sich damit

$$\begin{aligned} |X| &= |X \cap B_1| + |X \cap B_2^*| \\ &= (|B_1| - |B_{E\setminus X}|) + |B_X^*| \\ &= r(M) - r(E \setminus x) + r^*(X) \\ \Rightarrow r^*(X) &= |X| - r(M) + r(E \setminus x). \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Basen B_1 und B_2^* tatsächlich eine beliebige Teilmenge $X \subseteq E$ umfassen, da B_1 eine Basis und B_2 eine Cobasis ist! □

5.11 Beispiel: Wir beziehen uns auf das Beispiel 5.5, in dem das Dual das Vektormatroid $M[A]$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

bestimmt wurde. Dort haben wir festgestellt, dass die Menge $X := \{1, 2\}$ nicht unabhängig war und die Menge aller Basen $\mathcal{B} = \{\{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{3, 4\,\}$ bestimmt. Wir möchten nun $r^*(X)$ mit Hilfe der Rangformel bestimmen:

$$r^*(X) = |X| - r(M) + r(E \setminus X) = 2 - 2 + 2 = 2.$$

Ebenfalls in Beispiel 5.5 wurde festgestellt, dass $\{1, 2\}$ tatsächlich eine Basis des Duals ist und somit das Ergebnis $r^*(\{1, 2\}) = 2$ offensichtlich korrekt ist.

5.12 Proposition: Ist C_1 ein Kreis und C_2^* ein Cokreis eines Matroids M, dann ist

$$|C_1 \cap C_2^*| \neq 1.$$

Beweis. Wir beweisen durch Widerspruch. Sei E die Grundmenge von M. Wir nehmen an, dass $C_1 \cap C_2^* = \{x\}$ gilt. Sei $H = E \setminus C_2^*$, dann ist H gemäß Proposition 5.7 (iv) eine Hyperebene von M. Da H als Hyperebene ein Unterraum ist, gilt $cl(H) = H$. Da $C_1 \cap C_2^* = \{x\}$ und $H = E \setminus C_2^*$ gelten, ist $x \in C \subseteq H \cup \{x\}$ und mit Proposition 4.40 (ii) folgt mit einfacher Umformung $x \in cl(H) \setminus H$ ein Widerspruch $\lightning$. □

5.3 Clutter und Blocker

Zirkuit- und Basissysteme sind so genannte Clutter, d.h. Systeme von Mengen, so dass keine zwei voneinander verschiedene Elemente dieser Systeme ineinander enthalten sind. Um einen Clutter überhaupt definieren zu können, benötigt man eine Halbordnung (auch partielle Ordnung) auf der zu untersuchenden Menge. Eine Halbordnung ist refelxiv, transitiv und antisymmetrisch.

5.13 Definition: Die Inklusion $\subseteq$ bildet eine Halbordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$. Ein nicht leeres Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq E$ heißt **Clutter** (oder **Antikette**), wenn

$$X, Y \in \mathcal{A} \text{ mit } X \neq Y \quad \Rightarrow \quad [\text{ es gilt weder } X \leq Y \text{ noch } Y \leq X \,]$$

gilt. Ist $\mathcal{A}$ eine Clutter auf $\mathcal{P}(E)$, dann ist das Komplement $\mathcal{A}^* := \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{A}$ ebenfalls eine Clutter, den wir **komplementären Clutter** nennen.

Der Begriff „Clutter“ ist das englische Pendant zu „Antikette“ und somit eine Art Negation des mengentheoretischen Begriffs der „Kette“, denn in dieser sind zwei Elemente stets vergleichbar (vgl. totale Ordnung). Beide Begriffe finden sich auch in der Kombinatorik oder der Algebra wieder. Wie wir Eingangs bereits erwähnt haben sind Basis- und Zirkuitsysteme eines Matroids Clutter.

5.14 Beispiel:

a) Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{C}(M)$ das Zirkuitsystem von M. Da für alle Elemente $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$ das Axiom (C2) gilt, ist $\mathcal{C}(M)$ offensichtlich ein Clutter auf der halbgeordneten Menge $(E, \subseteq)$. Das Axiom (C2) drückt die Minimalität eines Kreises bezüglich der Halbordnung $\subseteq$ aus.

b) Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{B}(M)$ das Basissystem. Analog zu a) ist die Maximalität einer jeden Basis ausschlaggebend dafür, dass $\mathcal{B}(M)$ ein Clutter auf der halbgeordneten Menge $(E, \subseteq)$ ist. Seien $B_1, B_1 \in \mathcal{B}$ zwei Basen von M mit $B_1 \subseteq B_2$. Aufgrund der Definition einer Basis kann B_1 keine echte Teilmenge von B_2 sein, da ansonsten die Maximalität bezüglich der Inklusion verletzt wäre, deshalb muss $B_1 = B_2$ gelten.

c) In der halbgeordneten Menge $(E, \subseteq)$ sind $\{E\}$ und die einelementigen Mengen $\{e\}$ mit $e \in E$ offensichtlich Clutter. Ferner ist auch $\{e | \; e \in E\}$ oder jede nicht leere Teilmenge davon ein Clutter.

5.15 Definition: Seien $\mathcal{A}$ ein Clutter auf der hablgeordneten Menge $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$. Den inklusionsminimale Clutter

$$b(\mathcal{A}) = \{X \subseteq E | \ X \text{ bzgl. „}\subseteq\text{“ minimal, so dass } \forall A \in \mathcal{A}: \ (A \cap X) \neq \emptyset\}$$

nennen wir **Blocker** von $\mathcal{A}$.

Ein Beispiel wird die Definition veranschaulichen.

5.16 Beispiel: Wir betrachten wieder das uniforme Matroid $\mathcal{U}_{3,4}$ mit der Grundmenge $E = \{1,2,3,4\}$. Es sind

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}(\mathcal{U}_{3,4}) = \{ \ \{1,2,3\}; \ \{1,2,4\}; \ \{1,3,4\}; \ \{2,3,4\} \ \} \quad \text{und} \\ &\mathcal{C}(\mathcal{U}_{3,4}) = \{ \ \{1,2,3,4\} \ \} \end{aligned}$$

die Menge aller Basen bzw. aller Kreise von $\mathcal{U}_{3,4}$ und somit Clutter.

Zunächst bestimmen wir den Blocker von $\mathcal{B}$, d.h. wir suchen den bezüglich der Inklusion kleinsten Clutter, dessen Elemente mit jeder Basis einen nicht trivialen Schnitt besitzt. Jede Basis besitzt drei der vier Elemente aus der Grundmenge E, d.h. der Clutter

$$\mathcal{A}_1 := \{ \ \{1\}; \ \{2\}; \ \{3\}; \ \{4\} \ \}$$

oder jede Teilmenge davon, kann nicht der gesuchte Blocker sein: z.B. gilt $\{1\} \cap \{2,3,4\} = \emptyset$. Für alle Elemente aus

$$\mathcal{A}_2 := \{ \ \{1,2\}; \ \{1,3\}; \ \{1,4\}; \ \{2,3\}; \ \{2,4\}; \ \{3,4\} \ \}$$

ist der Schnitt mit einem beliebigen Element aus $\mathcal{B}$ nicht leer und da der Clutter $\mathcal{A}_1$ und jede Teilmenge davon nicht der gesuchte Blocker sein kann, sind die Elemente von $\mathcal{A}_2$ bezüglich der Inklusion minimal. Es folgt $b(\mathcal{B}) = \mathcal{A}_2$.

Der Blocker von $\mathcal{C}$ ist schnell gefunden, denn es gilt $b(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_1$. Da das einzige Element des Zirkuitsystem gerade E ist, besitzen alle Elemente aus $\mathcal{A}_1$ mit E einen nicht leeren Schnitt. Natürlich ist die Minimalität bezüglich der Inklusion ebenfalls erfüllt, denn ein Clutter ist gemäß Definition ungleich der leeren Menge.

5.17 Proposition: Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{D}$ zwei Clutter auf der Grundmenge E und $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Dann gilt:

(i) $b(\mathcal{A}) = \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad b(\mathcal{D}) = \mathcal{A}$,

(ii) $b(b(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Äquivalenz

$$b(\mathcal{A}) = \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \forall X \subseteq E: \ (\exists D \in \mathcal{D}, \text{ so dass } D \subseteq X \ \Leftrightarrow \nexists \ A \in \mathcal{A}, \text{ so dass } A \subseteq E \setminus X).$$

„⇒“: Sei $b(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$. Wir müssen zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} &\forall X \subseteq E : \\ &\exists D \in \mathcal{D}, \text{ so dass } D \subseteq X \quad \Leftrightarrow \quad \nexists\, A \in \mathcal{A}, \text{ so dass } A \subseteq E \smallsetminus X \end{aligned} \tag{$\clubsuit$}$$

gilt. Dazu seien $X \subseteq E$ und $D \in \mathcal{D}$ mit $D \subseteq X$. Aufgrund der Wahl von X gilt damit offensichtlich $D \cap (E \smallsetminus X) = \varnothing$. Aufgrund der Voraussetzung $b(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$ besitzt jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $D \in \mathcal{D}$ einen nicht leeren Schnitt, d.h. ein Teil von A ist in der Menge D enthalten. Die Menge D besitzt mit der Menge $E \smallsetminus X$ jedoch kein gemeinsames Element, da $D \cap (E \smallsetminus X) = \varnothing$. Somit kann ein beliebiges A aber auch nicht in $E \smallsetminus X$ gänzlich enthalten sein.

Es gebe nun kein $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq E \smallsetminus X$. Da die Elemente aus $\mathcal{A}$ jedoch Teilmengen von E sind, trifft die Menge X jedes $A \in \mathcal{A}$. Da die Elemente aus $\mathcal{D}$ minimal bezüglich der Inklusion sind und jedes $A \in \mathcal{A}$ treffen, muss ein $D \in \mathcal{D}$ in der Menge X enthalten sein.

„⇐“: Es gelte nun die Äquivalenz ($\clubsuit$). Sei X eine Teilmenge von E, welche die Äquivalenz erfüllt. Für diese Teilmenge existiert also kein Element $A \in \mathcal{A}$, das gänzlich in der Komplementmenge $E \smallsetminus X$ enthalten wäre. Im Folgeschluss muss X alle $A \in \mathcal{A}$ treffen, d.h. einen nicht leeren Schnitt besitzen. Setzt man $X := D$ für ein beliebiges $D \in \mathcal{D}$, so erfüllt diese Teilmenge ebenfalls die Äquivalenz, da $D \subseteq D$ gilt. Somit trifft auch diese Teilemge D ein jedes $A \in \mathcal{A}$ oder mit anderen Worten, die Schnittmenge $(A \cap D)$ ist nicht leer. Da $\mathcal{D}$ ein Clutter ist und somit kein weiteres Element $D \in \mathcal{D}$ enthalten kann, ist der Schnitt gemäß Definition 5.15 minimal.

Ad (i): Da ($\clubsuit$) bezüglich der Komplementbildung *symmetrisch* ist, folgt (i).

Ad (ii): Folgt aus (i) durch Einsetzen. □

Die Menge aller Cokreise (dessen Komplement die Menge aller Hyperebenen ist) eines Matroids M mit Grundmenge E ist das minimale Elemente aus $\mathcal{P}(E)$, welches einen nicht leeren Schnitt mit *allen* Basen von M aufweist. Formal wird diese Aussage in der nächsten Proposition, (i) formuliert. Die restlichen Behauptungen (ii) bis (iv) lassen sich aus (i) mit Hilfe der Eigenschaft eines Blockers und der Dualität beweisen.

5.18 Proposition: Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Seien $\mathcal{B}(M)$ die Menge aller Basen und $\mathcal{C}^*(M)$ die Menge aller Cokreise von M. Dann gilt:

(i) $b(\mathcal{B}(M)) = \mathcal{C}^*(M)$.

(ii) $b(\mathcal{C}^*(M)) = \mathcal{B}(M)$.

(iii) $b(\mathcal{B}(M^*)) = \mathcal{C}^*(M^*)$.

(iv) $b(\mathcal{C}^*(M^*)) = \mathcal{B}(M^*)$.

Beweis. Ad (i) und (ii): Die folgenden Aussagen sind offensichtlich äquivalent:

1. $C^* \in \mathcal{C}^*(M)$.

2. $E \setminus C^*$ ist eine Hyperebene.

3. $E \setminus C^*$ ist eine maximal nicht erzeugende Menge in M.

4. $E \setminus C^*$ enthält keine Basis von M, aber für alle $x \in C^*$ enthält $E \setminus (C^* \setminus \{x\})$ sehr wohl eine Basis.

5. Die Menge C^* schneidet *jede* Basis von M. Wählen wir ein $x \in C^*$, so schneidet die Differenzmenge $C^* \setminus \{x\}$ mind. eine Basis von M nicht mehr.

6. $C^* \in b(\mathcal{B}(M))$.

Damit ist (i) bereits nachgewiesen. Die Aussage (ii) folgt durch Anwendung von Proposition 5.17.

Ad(iii) und (iv): Setze $M := M^*$ und wende (i) bzw. (ii) an. □

Da Hyperebenen die Komplemente der Cokreise sind, können die Kreisaxiome auch für Hyperebenen formuliert werden. Ein Beweis ist aufgrund der Dualität einfach.

5.19 Proposition: Sei $\mathcal{H}$ eine Mengensystem von E. Dann gilt:

$\mathcal{H}$ ist ein Mengensystem von Hyperebenen $\Leftrightarrow$
$\mathcal{H}$ erfüllt die folgenden Bedingungen:

(H1) $E \notin \mathcal{H}$

(H2) $\mathcal{H}$ ist ein Clutter.

(H3) $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ mit $H_1 \neq H_2$ und $e \in E \setminus (H_1 \cup H_2)$, dann existiert ein $H_3 \in \mathcal{H}$, so dass $H_3 \supseteq (H_1 \cap H_2) \cup \{e\}$.

Anstatt eines formalen Beweises: Das Komplement zur leeren Menge entspricht der gesamten Grundmenge E und da gemäß (C1) die Bedingung $\emptyset \notin \mathcal{C}$ erfüllt ist, muss aufgrund Proposition 5.7 $E \notin \mathcal{H}$ gelten. Die Bedingung (C2) formuliert gerade die definierende Eigenschaft eines Clutters und da das Komplement ebenfalls ein Clutter ist, ist auch $\mathcal{H}$ ein Clutter. Auch das letzte Axiom ist klar, man muss nur beachten, dass die Komplementbildung die mengentheoretischen Operatoren quasi „umkehrt“. Machen Sie sich dies bitte (z.B. mit Hilfe eines Venn-Diagramms) klar.

6 Unterraumverbände von Matroiden

In den letzten Abschnitten haben wir bereits den Abschlussoperator *cl* (vgl. Definition 4.25) sowie Unterräume von Matroiden (vgl. Definition 4.35) kennen gelernt. Nun werden wir die Menge aller Unterräume eines gegebenen Matroids näher untersuchen und bereits im nächsten Satz feststellen, dass diese einen Verband bilden.

6.1 Satz: Seien $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{L}(M)$ die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von M, dann ist $\mathcal{L}(M)$ zusammen mit den Verknüpfungen

1. $X \wedge Y := X \cap Y$ und
2. $X \vee Y := cl(X \cup Y)$

ein Verband.

Beweis. Natürlich ist $(\mathcal{L}(M), \subseteq)$ eine Halbordnung. Wir müssen vor allem noch überprüfen, ob die angegebenen Operationen tatsächlich abgeschlossen sind. Dazu seien X und Y Unterräume und angenommen $X \cap Y$ sei kein Unterraum, d.h. die Differenzmenge $cl(X \cap Y) \setminus (X \cap Y)$ enthält mindestens ein Element x. Mit Proposition 4.40 (ii) folgt somit die Existenz eines Kreises C, so dass $x \in C \subseteq (X \cap Y) \cup \{x\}$ gilt. Damit müsste aber x in $X \cap Y$ enthalten sein $\lightning$. Es muss also $cl(X \cap Y) = (X \cap Y)$ gelten, die Menge $X \cup Y$ ist also abgeschlossen. Offensichtlich ist auch $cl(X \cup Y)$ eine abgeschlossene Menge. □

Ein jeder endliche Verband besitzt offensichtlich ein Null- und ein Einselement, für $\mathcal{L}(M)$ ist $cl(\varnothing)$ das Nullelement und die Grundmenge E entspricht dem Einselement.

6.2 Definition: Ein endlicher Verband $\mathcal{L}$ heißt **semimodular**, wenn er die Jordan-Dedekind-Kettenbedingung erfüllt und für jedes Paar x, y von Elementen aus $\mathcal{L}$ die Bedingung

$$h(x) + h(y) \geq h(x \vee y) + h(x \wedge y) = h(\sup(x, y)) + h(\inf(x, y))$$

gilt. Ein **geometrischer Verband** ist ein endlicher, atomarer und semimodularer Verband.

Zur Veranschaulichung werden wir ein prominentes Beispiel der projektiven Geometrie und der Theorie der Matroide betrachten. Um Platz zu sparen, werden wir Vektoren des betrachteten Vektorraums als Spaltenvektoren notieren.

6.3 Beispiel: Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit genau zwei Elementen. Wir betrachten sodann den dreidimensionalen Vektorraum $V := (\mathbb{F}_2)^3$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$. Dieser Vektorraum besteht aus genau $2^3 = 8$ Elementen, im Einzelnen sind das

$$\begin{array}{llll} v_0 := (0,0,0) & v_1 := (0,0,1) & v_2 := (0,1,0) & v_3 := (0,1,1) \\ v_4 := (0,1,0) & v_5 := (1,0,1) & v_6 := (1,1,0) & v_7 := (1,1,1). \end{array}$$

Man beachte, dass die Nummerierung der Vektoren $(x, y, z)_i \in \mathbb{F}_2^3$ mit $i = 1, 2, \ldots, 7$ gerade so gewählt ist, dass $x \cdot 2^2 + y \cdot 2^1 + z \cdot 2^0 = i$ gilt. Wie in jedem Vektorraum existieren die trivialen Untervektorräume V und $\{(0,0,0)\}$ mit Dimension 3 bzw. 0. Jeder der sieben Vektoren v_i mit $i = 1,2,\ldots,7$ korrespondiert mit genau einem 1-dimensionalen Untervektorraum $\langle v_i \rangle$, wobei $\langle v_i \rangle$ die lineare Hülle des Vektors v_i sei. Da ein jedes v_i zu sich selbst invers ist, bedeutet dies, dass $\langle v_i \rangle$ von der Form $\{v_0, v_i\}$ ist. Es gibt auch genau sieben 2-dimensionale Untervektorräume von V, im Einzelnen sind dies

$$\begin{aligned}
\{\ (0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\ \} &= \langle (0,1,0),\ (0,1,1) \rangle\,, \\
\{\ (0,0,0),\ (0,0,1),\ (1,0,0),\ (1,0,1)\ \} &= \langle (0,0,1),\ (1,0,0) \rangle\,, \\
\{\ (0,0,0),\ (0,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\ \} &= \langle (0,0,1),\ (1,1,0) \rangle\,, \\
\{\ (0,0,0),\ (0,1,0),\ (1,0,0),\ (1,1,0)\ \} &= \langle (0,1,0),\ (1,0,0) \rangle\,, \\
\{\ (0,0,0),\ (0,1,0),\ (1,0,1),\ (1,1,1)\ \} &= \langle (0,1,0),\ (1,0,1) \rangle\,, \\
\{\ (0,0,0),\ (0,1,1),\ (1,0,0),\ (1,1,1)\ \} &= \langle (0,1,1),\ (1,0,0) \rangle\,, \\
\{\ (0,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (0,1,1)\ \} &= \langle (1,0,1),\ (1,1,0) \rangle\,.
\end{aligned}$$

Der Nullpunkt muss in jedem Untervektorraum enthalten sein, wir können deshalb ohne Informationsverlust die oben aufgeführten Unterräume von V, wie folgt in einem Diagramm veranschaulichen:

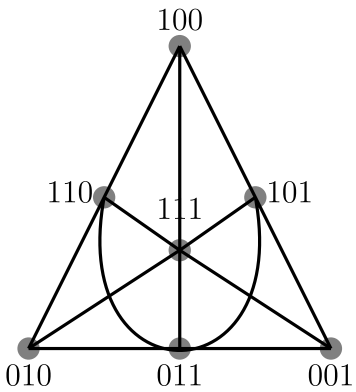


Abb. .5: *Fano-Matroid: Untervektorräume von* $(\mathbb{F}_2)^3$

In Abbildung .5 steht xyz stellvertretend für den Vektor $(x,y,z) \in V$. Da wir den Nullpunkt (und somit den trivialen Untervektorraum $\{0\}$) nicht darstellen, steht jeder Punkt aus Abbildung .5 für genau einen 1-dimensionalen Unterraum. Entsprechend symbolisiert jede Strecke, die drei Punkte miteinander verbindet, einen 2-dimensionalen Unterraum. Die gesamte Ebene steht stellvertretend für den ganzen Vektorraum V. Es sei noch festgehalten, dass das Fano-Matroid bzw. dessen Diagramm auch als projektive Ebene interpretiert werden kann.

Wir können V auch als Matroid $M[V]$ betrachten, wobei die Unterräume dieses Matroids gerade die Untervektorräume von V sind. Dabei identifizieren wir einen jeden Vektor v_i durch dessen Index $i = 1,2,\ldots,7$. Entsprechend ist Abbildung .5 die graphische Darstellung des Matroids $M[V]$, des so genannten **Fano-Matroids**. Die Menge aller Unterräume bildet einen geometrischen Verband.

Die Indexmengen $\{0,i\}$ mit $i = 1,2,\ldots,7$ stehen stellvertretend für die sieben 1-dimensionalen Untervektorräume von V, d.h. die Rangfunktion von $M[V]$ nimmt für

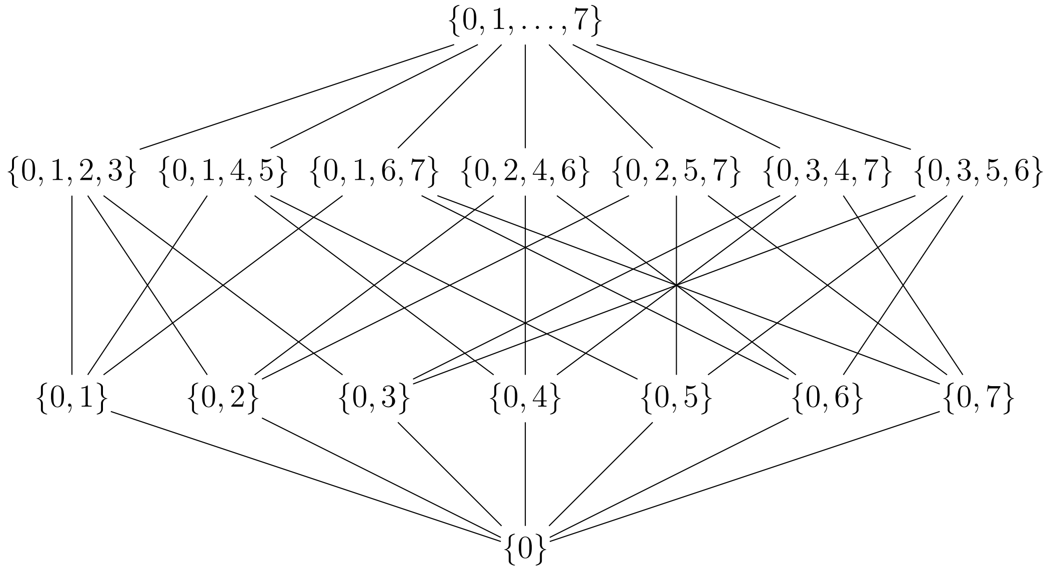


Abb. .6: *Geometrischer Verband des Fano-Matroids*

diese Indexmengen den Wert 1 an. Die mit den Indizies korrespondierende Menge an Vektoren auf der nächst höheren Ebene, bilden die 2-dimensionalen Untervektorräume. Das Einselement des Verbandes repräsentiert den kompletten Vektorraum V und das Nullelement $\{0\}$ den Nullraum.

Satz 6.1 besagt, dass die Menge aller Unterräume eines Matroids M ein Verband ist. Die nächste Propositionen und Folgerungen werden zeigen, dass ein Unterraumverband eines Matroids stets geometrisch ist, d.h. atomar, endlich und semimodular. Letztere Eigenschaft folgt aus

6.4 Proposition: Sind X und Y Unterräume eines Matroids $M = (E,\mathcal{I})$ mit $X \subseteq Y$, dann besitzt jede maximale Kette von Unterräumen von X nach Y dieselbe Länge $r(Y) - r(X) \in \mathbb{N}$.

Beweis. Können wir zeigen, dass für Mengen $X \subset_\bullet Y$ die Gleichung $r(Y) = r(X)+1$ gilt, so folgt die Behauptung. Wir nehmen also an, dass Y die Menge X bedeckt, d.h., das Intervall $[X,Y]$ enthält nur die Unterräume X und Y. Ferner folgt aus der Annahme, dass $X \subsetneq Y$ gilt, weshalb wir ein $y \in Y \setminus X$ wählen können. Da X und Y Unterräume (und damit abgeschlossen sind) gelten mit (A1) bis (A3) die Inklusionen $X \subsetneq cl(X \cup \{y\}) \subseteq Y$. Nach Annahme bedeckt Y den Unterraum X, deshalb muss $cl(X \cup \{y\}) = Y$ gelten. Aufgrund der Rangaxiome gilt weiter

$$r(cl(X \cup \{y\})) \overset{\text{(RCL)}}{=} r(X \cup \{y\}) \overset{X \lessdot Y}{=} r(Y) \overset{\text{(R3)}}{\leq} r(X) + 1.$$

Wegen (R2) und $X \subsetneq Y$ folgt zusätzlich $r(X) \leq r(Y)$, insgesamt kann also nur $r(X) = r(Y)+1$ gelten. Da sich ein Unterraum aus Atomen erzeugen lässt, folgt die Behauptung. □

6.5 Folgerung: Seien M ein Matroid und $\mathcal{L}(M)$ der Unterraumverband von M. Der

Verband $\mathcal{L}(M)$ erfüllt die Jordan-Dedekind-Kettenbedingung.

Beweis. Gemäß der letzten Proposition gilt $r(Y) - r(X)$ für jede Kette von X nach Y. Die Jordan-Dedekind-Kettenbedingung ist erfüllt, wenn jede maximale Kette dieselbe Höhe besitzen. Setzen wir also $h(X) := r(X)$, d.h. definieren wir die maximale Länge (=Höhe) einer Kette von O nach X als den Rang dieser Menge, so ist die Bedingung offensichtlich erfüllt. □

Erfüllt ein Unterraumverband $L_{\subseteq}$ die Jordan-Dedekind-Kettenbedingung, so *definieren* wir also den Rang der Menge $X \in V$, als die maximale Länge einer Kette von O nach X (=Höhe). Um nachzuweisen, dass jeder Unterraumverband $\mathcal{L}(M)$ tatsächlich geometrisch ist, müssen wir noch die Atomarität und die Submodularität nachweisen.

6.6 Proposition: Sei M ein Matroid, dann ist dessen Unterraumverband $\mathcal{L}(M)$ submodular und atomar.

Beweis. Wir haben bereits festgelegt, dass $h(X) := r(X)$ für alle $X \in \mathcal{L}(M)$ gilt. Für Unterräume $X, Y \in \mathcal{L}(M)$ gilt deshalb

$$\begin{aligned} h(X) + h(Y) = r(X) + r(Y) &\overset{\text{(R3)}}{\geq} r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \\ &\overset{\text{(RCL)}}{=} r(cl(X \cup Y)) + r(X \cap Y) \\ &= h(cl(X \cup Y)) + h(X \cap Y) \\ &= h(X \vee Y) + h(X \wedge Y). \end{aligned}$$

Es ist $\mathcal{L}(M)$ also submodular. Ist X nun ein Unterraum und $\{b_1, \ldots, b_k\}$ eine Basis von X, es gilt dann

$$X = cl(\{b_1, \ldots, b_k\}) = cl(\{b_1\}) \vee cl(\{b_2\}) \vee \ldots cl(\{b_k\}).$$

Es ist $cl(\{b_i\})$ ein Atom von $\mathcal{L}(M)$ und somit kann jeder Unterraum von M als Vereinigung von Atomen dargestellt werden, wobei $cl(\varnothing)$ die Vereinigung der leeren Menge von Atomen sein soll. □

Wir erhalten nun schließlich

6.7 Folgerung: Ein jeder Unterraumverband $\mathcal{L}(M)$ eines Matroids M ist geometrisch.

Beweis. Dies folgt direkt aus Proposition 6.6 und Folgerung 6.5. □

Es gilt aber auch die Umkehrung der Aussage aus Folgerung 6.7 und somit

6.8 Satz: Es sei $\mathcal{L}$ ein Verband. Dann gilt:

$$\mathcal{L} \text{ ist ein geometrischer Verband} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L} \text{ ist der Verband eines Matroids.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Es sei $\mathcal{L}$ ein beliebiger geometrischer Verband. Wenn Null- und Einselement von $\mathcal{L}$ identisch sind, dann ist $\mathcal{L}$ isomorph zu unitären Matroid $\mathcal{U}_{0,0}$. Wir dürfen also annehmen, dass Null und Eins des Verbandes nicht identisch sind. In Folge besitzt $\mathcal{L}$

eine Menge $E \neq \emptyset$ von Atomen, mit denen wir eine Rangfunktion definieren werden. Wir definieren

$$r(X) := h(\bigvee_{x \in X} x) \quad \forall X \subseteq E.$$

Somit gilt für $X \subseteq E$ und $e \in E$

$$r(X) = h(\bigvee_{x \in X} x) \leq h(\bigvee_{x \in X \cup \{e\}} x) = r(X \cup \{e\}).$$

Ferner ist

$$r(X \cup \{e\}) \leq h(\bigvee_{x \in X} x) + h(\{e\}) - h(\bigvee_{x \in X} x \wedge \{e\}) \leq r(X) + 1.$$

Die so definierte Rangfunktion erfüllt also die Bedingung (R2). Sind schließlich $X \subseteq E$ und $e, f \in E$, so dass $r(X \cup \{e\}) = r(X) = r(X \cup \{f\})$ gilt, dann ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} r(X \cup \{e\} \cup \{f\}) &= h(\bigvee_{x \in X \cup \{e,f\}} x) \\ &= h\left((\bigvee_{x \in X \cup \{e\}} x) \vee (\bigvee_{x \in X \cup \{f\}} x) \right) \\ &\leq h\left((\bigvee_{x \in X \cup \{e\}} x) \right) + h\left((\bigvee_{x \in X \cup \{f\}} x) \right) - h\left((\bigvee_{x \in X \cup \{e\}} x) \wedge (\bigvee_{x \in X \cup \{f\}} x) \right) \\ &= r(X) + r(X) - h\left(\bigvee_{x \in X} x \right) = r(X). \end{aligned}$$

Es erfüllt r also auch (R3) und somit ist r die Rangfunktion eines Matroids M mit der Grundmenge E. Wir müssen noch nachweisen, dass $\mathcal{L}(M)$ isomorph zum Verband $\mathcal{L}$ ist. Dazu sei $\psi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}(M)$ definiert durch

$$X \mapsto \psi(X) := \{e \in E | \; e \leq X\}.$$

Es ist ψ wohldefiniert, bijektiv und erhält die Ordnung, d.h. es gilt $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}(M)$.

„$\Leftarrow$“: Diese Richtung wurde bereits in 6.7 gezeigt. $\square$

Hinweis:

Haben Sie einen Fehler oder eine Unstimmigkeit in diesem Dokument entdeckt?
Falls dem so ist, dann senden Sie mir bitte eine E-Mail an Alexander@mathematik-netz.de.

Vielen Dank!

Weiterhin viel Spaß mit der Mathematik!

http://www.mathematik-netz.de
http://www.mathering.de

Literaturverzeichnis

[1] Matroid Theory, James G. Oxley, 1992, Oxford Science Publications.

[2] Matroide - Vorlesung WS 96/97, Winfried Hochstättler, 6. August 1998, Zentrum für paralleles Rechnen der Universtiät zu Köln.

[3] Matroidtheorie, Matthias Kriesell, 2006, Mathematisches Seminar der Universität Hamburg.

[4] Theory of Matroids, Neil White, 1986, Cambridge University Press.

[5] On Abstract Properties Of Linear Dependence, Hassler Whitney, 1934, American Mathematical Society.

[6] Algebra - Erster Teil, B.L. van der Waerden, 1966, Springer-Verlag.

[7] Algebra - Zweiter Teil, B.L. van der Waerden, 1967, Springer-Verlag.

[8] Graphentheorie, Ulrich Seip, 2002, FernUniversität in Hagen.